

7. cvičení z MA II. (19. 11. 2025)

A. Věta o implicitních funkcích

Nechť $F = (F_1, \dots, F_n) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$

je zobrazení definované na okolí $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ bodu $(\bar{x}, \bar{y})$.

Zajímá nás (v okolí bodu $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$) řešení soustavy rovnic:

$$F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

$\dots$

$$F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

Nechť pro tato $F = (F_1, \dots, F_n)$ a pro daný bod $(\bar{x}, \bar{y})$ platí:

(i) $F_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ pro $1 \leq i \leq n$

(ii) F_i mají spojitě parciální derivace v okolí bodu $(\bar{x}, \bar{y})$ pro $1 \leq i \leq n$

(iii) $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\bar{x}, \bar{y})\right) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\bar{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\bar{y}$ takové, že pro každý bod $x \in U$ existuje právě jeden bod $y \in V$ ($y = y(x)$) splňující $F_i(x, y) = 0$ pro $1 \leq i \leq n$.

Pak též umíme spočítat všechny derivace f v bodě $\bar{x}$ (a tedy Taylorovy polynomy).

1. Mějme funkci $F(x, y)$ definovanou níže a bod $(\bar{x}, \bar{y}) = (6, 2)$.

Dokažte, že v nějakém okolí $U \times V$ tohoto bodu $(\bar{x}, \bar{y})$ existuje funkce $f = f(x)$, pro kterou platí $f(\bar{x}) = \bar{y}$ a navíc $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$.

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4$$

Určete $f'(\bar{x})$ a $f''(\bar{x})$.

2. Mějme dvě funkce f, g , kde $x = f(z)$, $y = g(z)$. Určete, zda je možné tyto funkce definovat následujícími podmínkami:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$$

$$x + y + z = 2$$

$$f(2) = 1, \quad g(2) = -1$$

Pokud to lze, určete $f'(2)$, $g'(2)$ a $f''(2)$, $g''(2)$.

3. Ukažte, že zadanou množinu M lze na okolí bodu $a = (1, 0)$ popsat jako graf funkce $f = f(x)$, kde $f(1) = 0$.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\}$$

Spočtete její parciální derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

B. Aproximace pomocí Taylorovy řady.

Taylorova řada pro funkci jedné proměnné (definice): Necht $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na nějakém okolí a , která má v tomto bodě vlastní derivaci všech řádů. Pak Taylorovou řadou v bodě a rozumíme následující řadu, kde $x \in \mathbb{R}$:

$$T^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Taylorova řada pro funkci více proměnných:

Necht $a \in \mathbb{R}^n$ a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na nějakém okolí a , která má v tomto bodě spojitě parciální derivace libovolného řádu. Pak Taylorovou řadou v bodě a rozumíme následující řadu (kde $x \in \mathbb{R}^n$):

$$T^{f,a}(x) = f(a) + \frac{1}{1!} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} (x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots$$

4. Aproximujte následující funkce f v okolí daného bodu a :

- (a) Pro připomenutí: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a = 0$, $f(x) = \sin(x)$
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \cdot \exp(x + y)$, $a = (0, 0)$
- (c) Lze aproximovat i funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$? Jak?