

6. cvičení z MA II. (5. 11. a 10. 11. 2025)

A. Směrová derivace a tečná rovina (z minula)

Nechť $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, G je otevřená, $a \in G$ a v je vektor v $\mathbb{R}^n \setminus \{0, \dots, 0\}$. Směrovou derivací fce f v bodě a ve směru v -té proměnné rozumíme číslo

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \quad \text{značí se též } f'_v(a)$$

(pokud tato limita existuje).

Jak souvisí směrová derivace s parciálními derivacemi?

1. Vypočtete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \arctg xy$ ve směru $v = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ a v bodě $a = (1, 1)$. Jak souvisí totální diferenciál se směrovou derivací?

2. Vypočtete totální diferenciál funkce $f(x, y) = e^{x-y^2}$ v bodě $a = (0, 0)$; jaká bude jeho hodnota ve směrech $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$?

Vypočtete derivace této funkce f v zadaných směrech v a v zadaném bodě a .

3. (BONUS) Určete směrové derivace funkce $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$ v bodě $(0, 0, 0)$ a směru $h = (h_1, h_2, h_3)$. Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje totální diferenciál.

Tečná nadrovina. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T , $x \in \mathbb{R}^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

4. Tečná nadrovina a totální diferenciál: Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$ v bodě $(1, 1, ?)$.

B. Řetízkové pravidlo.

Nechť má fce $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$.

Nechť mají funkce $g_k(t_1, \dots, t_r) = g_k(\mathbf{t})$ parciální derivace v bodě $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r)$ a nechť je $g_k(\mathbf{b}) = a_k$ pro $k = 1, \dots, n$. Označme $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$, (tedy $\mathbf{g} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$).

Potom má funkce $(f \circ \mathbf{g})(t_1, \dots, t_r) = f(g_1(\mathbf{t}), \dots, g_n(\mathbf{t})) = f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))$ všechny parciální derivace v $\mathbf{b}$, a platí:

$$\frac{\partial (f \circ \mathbf{g})}{\partial t_j}(\mathbf{b}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{g}(\mathbf{b})) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial t_j}(\mathbf{b})$$

Tedy $D(f \circ \mathbf{g}) = D\mathbf{f} \cdot D\mathbf{g}$ je násobení matic !!

(kde $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ a kde značíme $D\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial t_j} \right)_{ij}$)

5. Mějme funkce $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, kde:

$$f(x, y) = xe^{x+y}$$

$$g_1(r, s) = r \cos(s)$$

$$g_2(r, s) = r \sin(s)$$

Složením dostaneme funkci $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $H(r, s) = f(g_1(r, s), g_2(r, s))$

- (a) Spočítejte „postaru“ její parciální derivace.
- (b) Pomocí řetízkového pravidla spočítejte parciální derivace funkce H .
- (c) Spočítejte totální diferenciál funkce H .
- (d) Aproximujte pro malá ϵ hodnotu $H(1 + \epsilon, \epsilon)$ (pomocí totálního diferenciálu).

6. Mějme funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = x + xy + y/x$$

$$g(r, s) = (\sin(rs), r - s)^T$$

Spočítejte všechny parciální derivace složené funkce $H = f \circ g$. Užijte maticové značení z přednášky! Jak toto souvisí s aproximací lineární funkcí?

BONUS: Záměnnost parciálních derivací vyšších řádů

Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací - vypočítejte je pro bod $(0, 0)$:

$$f(x, y) = xy \text{ pro } |x| \geq |y| \quad \text{a} \quad f(x, y) = 0 \text{ pro } |x| < |y|$$