

2. Cvičení z MA II. (8. 10. a 11. 10. 2024)

1. domácí úkol (termín 22. 10, resp. 27. 10. 2025)

A. Ještě metrické prostory

Co je metrický prostor a jak se definují otevřené a uzavřené množiny, uzávěr množiny?

Co jsou vzory a obrazy pro zobrazení mezi metrickými prostory?

1. Mějme metrický prostor (M, ρ) . Zdůvodněte následující:

- (a) $M, \emptyset$ jsou otevřené i uzavřené v M .
- (b) Sjednocení libovolného souboru otevřených množin je otevřená množina.
- (c) Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.
- (d) Obdobná tvrzení platí pro uzavřené množiny (konečné sjednocení, libovolný průnik).

2. Platí následující tvrzení? Dovedete zdůvodnit?

- (a) Množina $B(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}$ (pro $r > 0$) je otevřená množina metrického prostoru (M, d) .
- (b) Množina $B'(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}$ (pro $r > 0$) je uzavřená množina metrického prostoru (M, d) .
- (c) Jednobodové množiny jsou uzavřené množiny metrického prostoru (M, d) .
- (d) Jak vypadají otevřené množiny v metrickém prostoru (M, d) , jehož každý bod je izolovaným bodem? (Bod a je izolovaným bodem množiny $A \subseteq M$, pokud $\exists r > 0$ takové, že $B(a, r) \cap A = \{a\}$.)

3. Jaký je vztah mezi následujícími množinami – množinou $\overline{A \cap B}$ a množinou $\overline{A} \cap \overline{B}$?

B. Spojitost reálných funkcí více proměnných

Jak se definuje spojitě zobrazení? Jaká tvrzení o spojitých zobrazeních znáte? (skládání spoj. funkcí, charakteristika pomocí vzorů, charakteristika pomocí konv. posloupností)

4. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojitě funkce $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (pro jednoduchost se omezme na polynomy dvou proměnných).

5. Zkoumejte následující funkci $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (kde na $\mathbb{R}^2$ uvažujeme např. eukleidovskou metriku):

$$f(x, y) = \sqrt{\log(x - y)}.$$

Určete definiční obor této funkce (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice.

Nabývá tato funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

6. Lze následující funkce dodefinovat tak, aby byly na $\mathbb{R}^2$ spojitě? Jak? Jsou tyto funkce omezené? Nabývají tam své největší a nejmenší hodnoty (pokud ano, jaké)?

(a) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$