

## 6. Cvičení z MA I. (26. 4. 2025)

A. Ještě součet geometrické řady.

B. Funkce – monotonie, spojitost (a limita, pokud stihneme).

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá? Kdy je funkce rostoucí?

1. Dokažte, že funkce  $f$  definovaná na intervalu  $I \subset \mathbb{R}$  je rostoucí, právě když platí

$$\forall x, y \in I, x \neq y : \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

2. Mějme funkci  $f$  definovanou na  $\mathbb{R}$ . Dokažte, že je-li  $f$  neklesající na  $(-\infty, a)$  a nerostoucí na  $\langle a, +\infty)$  pro nějaké  $a \in \mathbb{R}$ , pak  $f$  nabývá maxima.

3. Mějme funkci  $f$  definovanou na  $\mathbb{R}$  takovou, že  $f$  nabývá minima v bodě  $a \in \mathbb{R}$ . Musí existovat  $\epsilon > 0$  takové, že  $f$  je nerostoucí na  $(a - \epsilon, a)$  a neklesající na  $\langle a, a + \epsilon)$ ?

4. Které z následujících operací, provedeme-li je na neklesající funkce  $f$  a  $g$ , dává opět neklesající funkci?

- (a)  $f + g$       (b)  $f - g$       (c)  $\max\{f, g\}$       (d)  $\min\{f, g\}$       (e)  $f \circ g$

5. Určete body, kde následující funkce nejsou spojitě. Je možno je v těchto bodech spojitě dodefinovat?

- (a)  $\frac{1}{x-15}$       (b)  $|(x-2)(x+3)|$       (c)  $\lfloor x \rfloor - x$

6. Předpokládejme, že reálné funkce  $f$  a  $g$  jsou definované na okolí bodu  $a$  a jsou v tomto bodě spojitě. Je pak nutně v bodě  $a$  spojitá i funkce  $f + g$  ?

7. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ , pokud  $a = 0, 1, +\infty, -\infty$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\sin x}$