

5. Cvičení z MA I. (19. 3. 2025)

Posloupnosti a limity, řady

Rozcvička. Mějme posloupnost $\{a_n\}$ danou předpisem $a_n = \left(\frac{x^3}{3x-2}\right)^n$. Zjistěte, pro která čísla $x \in \mathbb{R}$ je $\{a_n\}$ monotonní.

1. Spočítejte následující limity:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \cos(n^2)) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-5 \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor)}{n} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4+(-1)^n}{-7}\right)^n$$
$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lfloor xk \rfloor}{n^2} \quad (\text{parametr } x \in \mathbb{R}^+, \lfloor x \rfloor \dots \text{ celá část } x, k \in \mathbb{N})$$

‘Škála limit’ $n^n \gg n! \gg q^n \gg n^k$ (pro pevné $k \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$)

2. Posloupnost může být zadána též rekurentně. Dokažte, zda následující posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, případně tuto limitu spočítejte:

$$(a) a_1 = \sqrt{c} \quad (c > 0, c \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$
$$(b) a_1 = c \quad (c > 0, c \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

3. Najděte hromadné body, $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ $\liminf_{n \rightarrow \infty}$, posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$, kde

$$(a) a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \quad (b) b_n = n - 4\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \quad (c) c_n = (-1)^n \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)$$

4. Jak definujeme nekonečnou řadu? Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{6^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

5. **BONUS:** n -tá odmocnina:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \quad (\text{kde } a \geq 0, a \in \mathbb{R} \text{ je pevný parametr})$$
$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$$

6. **BONUS:** Další příklady, pokud byste si chtěli procvičovat počítání limit.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 3}) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$$
$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2}{2^n(3 - (-1)^n)}$$
$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n) \quad (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt[3]{n^4}}$$

Příště: funkce, limita funkce, spojitost