

4. Cvičení z MA I. (12. 3. 2025)

Na webu viz druhou sérii domácích úkolů – termín odevzdání 26. 3. 2025!

Limity posloupností

1. Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení ($\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, které mají (vlastní či nevlastní) limitu po řadě A a B):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

2. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n^2$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n + 10^n}{-2^{n+1} + 5^{n+1} + 10^{n+1}}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{n+2} - \frac{n}{2}$

3. ‘Škála limit’ – určete, čemu se rovnají následující limity (pro $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q^n$ (c)* $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n$ (BONUS)

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!}$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ (f)* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!}$ (BONUS)

ZÁVĚR: $n^n \gg n! \gg q^n \gg n^k$ (pro pevné $k \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$)

4. Najděte posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$) takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ a že:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

5. (BONUS) A ještě n -tá odmocnina:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$ (kde $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ je pevný parametr)

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$