

13. Cvičení z MA I. (14. 5. 2025)

Newtonův integrál

1. Spočítejte následující Newtonovy integrály (případně zdůvodněte, že neexistují).

- (a) $\int_0^1 x^\alpha dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (b) $\int_0^\infty \sin x dx$ (c) $\int_0^5 |x^2 - 3x + 2| dx$
(d) $\int_a^b \operatorname{sgn} x dx$ (e) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$ (f) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3} dx$
(g) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$ (h) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$
-

Riemannův integrál.

2. Určete z definice hodnotu Riemannova integrálu $(R) \int_{-2}^2 \lfloor x \rfloor dx$.

3. S použitím Riemannova integrálu:

- (a) Odhadněte shora číslo $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ a na základě toho dokažte, že řada $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ konverguje.
(b) Odhadněte zdola číslo $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ a na základě toho dokažte, že řada $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ diverguje.
-

Jaký je vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem?

Výsledky: (Případné chyby prosím reportujte emailem!)

1. (Newtonův integrál)

(a) $\alpha > -1 : \frac{1}{\alpha+1}; \quad \alpha < -1 : \text{NEEX.} \left(\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 = +\infty \right); \quad \alpha = -1 : \text{NEEX.} \left([\ln |x|]_0^1 = +\infty \right)$

(b) NEEX. $([-\cos x]_0^1 \text{ neex.})$

(c) $\frac{29}{2}$

(d) $0 < a < b : b - a; \quad a < b < 0 : a - b; \quad a < 0 < b : \text{NEEX. (nemá prim. fci)}$

(e) $\arctg 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(f) $\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctg \frac{e^x}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{e}{\sqrt{3}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{e}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right)$

(g) NEEX. $([\cos \frac{1}{x}]_0^1 \text{ neex.})$

(h) $2(1 - \frac{1}{e})$

3. (Riemannův integrál)

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} \, dx = 2 - \frac{1}{n} \rightarrow 2$

(b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{1}{x} \, dx = \ln n \rightarrow +\infty$