

11 a 12. Cvičení z MA I. (30. 4. a 7. 5. 2025)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Primitivní funkce

DEF: Mějme funkci f definovanou na otevřeném neprázdném intervalu I . Existuje-li na tomto intervalu funkce F , která má pro všechna $x \in I$ vlastní derivaci a platí $F'(x) = f(x)$, řekneme, že F je na I primitivní k f .

V: Je-li F na I primitivní funkce k nějaké funkci f , pak je F na I spojitá.

V: Spojitá funkce f na otevřeném neprázdném intervalu I má na tomto intervalu primitivní funkci (tj. podmínka postačující, nikoli nutná).

V: Má-li funkce f na intervalu I primitivní funkci, pak je obraz $f(I)$ též interval (tedy funkce má Darbouxovu vlastnost, tj. nabývá mezhodnot).

Metody pro výpočet primitivní funkce:

- tabulkové integrály (viz)
- per partes
- substituce ... zde jen 1. typu
- rozklad na parc. zlomky (zde jen pro rac. lomené funkce s $\mathbb{R}$ kořeny)

1. Určete primitivní funkce k následujícím funkcím (na největších možných intervalech):

- (a) $\int x^3 + 2x + \frac{16}{x} dx$ (b) $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3 \cos x dx$ (c) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$
(d) $\int (3e^x + \frac{1}{x}) dx$ (e) $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{x}) dx$ (f) $\int \frac{x^2-1}{x} dx$ (g) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$
(h) $\int (\sqrt[3]{x} + x^2) dx$ (i) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$ (j) $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$, kde $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

2. ‘Lepení’ primitivních funkcí – určete primitivní funkce na největším možném intervalu:

- (a) $\int |x| dx$ (b) $\int |\cos x| dx$

3. Určete primitivní funkce: metoda per partes:

- (a) $\int x \sin x dx$ (b) $\int (x^2 - x) \exp(x) dx$ (c) $\int \exp(x)(\sin x + \cos x) dx$
(d) $\int \ln |1+x| dx$ (e)* $\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x dx$ (f)* $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

4. Určete primitivní funkce: metoda substituce

- (a) $\int 2x \cdot \exp(-x^2) dx$ (b) $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$ (c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$
(d) $\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}} dx$ (e) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$
(g) $\int \operatorname{tg} x dx$ (h) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ (i) $\int \exp(\sqrt{x}) dx$

5. Určete primitivní funkce: doplnění na čtverec a rozklad na parciální zlomky

- (a) $\int \frac{x^2+2x}{x+3} dx$ (b) $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx$ (c) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$
(d)* $\int \frac{1}{(3x^2-2x-1)} dx$ (e)* $\int \frac{3x+4}{x^2+3x+5} dx$ (f) $\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}} dx$

Výsledky: (Primitivní funkce až na $c \in \mathbb{R}$ - případné chyby prosím reportujte emailem!)

1. (tabulkové integrály)

- (a) $\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} + 16 \ln|x|$, na $(-\infty; 0), (0; +\infty)$
- (b) $18e^x + 2e^{8x} - \ln|x| + 3 \sin x$, na $(-\infty; 0), (0; +\infty)$
- (c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x$, na $\mathbb{R}$
- (d) $3e^x + \ln|x|$, na $(-\infty; 0), (0; +\infty)$
- (e) $\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
- (f) $\frac{x^2}{2} - \ln|x|$, na $(-\infty; 0), (0; +\infty)$
- (g) $\operatorname{tg} x - x$, na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
- (h) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^4} + \frac{x^3}{3}$, na $\mathbb{R}$
- (i) $-2\frac{1}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, na $(0; +\infty)$
- (j) $n \neq 1: \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, na $(-\infty; a), (a; +\infty)$; $n = 1: \ln|x-a|$, na $(-\infty; a), (a; +\infty)$

2. (“lepení” prim. fci)

- (a) $\operatorname{sgn} x \cdot \frac{x^2}{2}$, na $\mathbb{R}$
- (b) na každém intervalu $\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ předpis $F(x) = (-1)^k \sin x + 2k$ (tj. def. na $\mathbb{R}$)

3. (per partes)

- (a) $-x \cos x + \sin x$, na $\mathbb{R}$
- (b) $e^x(x^2 - 3x + 3)$, na $\mathbb{R}$
- (c) $e^x \cdot \sin x$, na $\mathbb{R}$
- (d) $x \ln|1+x| - x + \ln|1+x|$, na $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$
- (e) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} \cdot (\ln^2 x - \frac{2}{3} \ln x + \frac{8}{9})$, na $(0; +\infty)$
- (f) $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{tg} x \right)$, na $\mathbb{R}$

4. (substituce)

- (a) $-e^{-x^2}$, na $\mathbb{R}$
- (b) $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4}$, na $\mathbb{R}$
- (c) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, na $\mathbb{R}$
- (d) $\frac{1}{5}\sqrt{2+5x^2}$, na $\mathbb{R}$
- (e) $\frac{1}{3} \ln^3 x$, na $(0; +\infty)$
- (f) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2}$, na $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$
- (g) $-\ln|\cos x|$, na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
- (h) $2\sqrt{x} - 2 \ln(1 + \sqrt{x})$, na $(0; +\infty)$
- (i) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$, na $(0; +\infty)$

5. (parc. zlomky)

(a) $\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln |x + 3|$, na $(-\infty; -3), (-3; +\infty)$

(b) $\frac{3}{2} \ln |x^2 + 3x + 5| - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{11}} \left(x + \frac{3}{2}\right) \right)$, na $\mathbb{R}$

(c) $\ln |x - 2| + \ln |x + 5|$, na $(-\infty; -5), (-5; 2), (2; +\infty)$

(d) $\frac{1}{4} \ln |x - 1| - \frac{1}{4} \ln |3x + 1|$, na $(-\infty; -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}; 1), (1; +\infty)$

(e) $\ln \frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$, na $(-\infty; 0), (0; 1), (1; +\infty)$

(f) $\frac{1}{3} \arcsin(x - \frac{1}{3})$, na $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$