10. Cvičení z MA I. (23. 4. 2025 – plus domácí příparava)

1. Hezký příklad na procvičování - vyšetřete průběh následující funkce, najděte extrémy a načrtněte grafy:

(d) $$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\sin^2 x}) & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí. Zaměřte se na to, zda tyto funkce nabývají globálních a lokálních extrémů (= lok. maxim a minim, (neostrých) glob. maxim a minim).

polynomy:

(a) $f_1(x) = x^2 - x^4$ (b) $f_2(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$

racionální (lomené) funkce:

(a) $f_1(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (b) $f_2(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$

(c) $$g(x) = \begin{cases} \frac{|1+2x|}{\sqrt{1-2x+x^2}} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

gonio/cyklometrické funkce:

(a) $f_1(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ **(b)** $\arccos|\frac{1-x}{1-2x}|$

exponenciála:

(a) $f_1(x) = e^x - x$ **(b)** x^x (c) $f_3(x) = x^{1/x}$

(d) $f_4(x) = |x-1| \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$ **(e)** $f_n(x) = e^x(x+1)^n \ \ n \in \mathbb{N}$

3. Další aplikace derivací:

(a) Ukažte, že obdélník minimalizující obvod při daném obsahu je čtverec.

(b) Z čtvercového listu papíru odstřihneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstřihnout, aby vzniklá krabička měla co největší objem?