Vzorový zápočtový test

Jméno:

---

1. Mějme následující funkci:
$$f(x,y) = \arcsin\frac{y}{x+1}$$
(a) Najděte definiční obor D_f funkce f a načrtněte jej.
(b) Je D_f otevřená nebo uzavřená množina? Jde o kompaktní množinu? (Nemusíte formálně dokazovat, ale zdůvodněte!)
(c) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$.
(d) Je funkce f v bodě $[0,0]$ diferencovatelná? Pokud ano, určete v tomto bodě totální diferenciál.
(e) Aproximujte hodnotu funkce f v okolí tohoto bodu pomocí totálního diferenciálu.
Vše pečlivě zdůvodněte! (10 bodů)

2. Mějme následující funkci $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$F(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$$
(a) Dokažte, že v nějakém okolí U bodu $(0,1)$ existuje funkce $y = y(x)$ splňující podmínky $y(0) = 1$ a $F(x, y(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$.
(b) Určete $y'(0)$ a $y''(0)$.
Pečlivě zdůvodněte! (10 bodů)

3. Určete globální extrémy zadané funkce f na množině M a lokální extrémy uvnitř M:
$$f(x,y) = x \cdot \sin y + x^2$$
$$M = \{[x,y] \in R^2;\ -1 \le x < 1 \;\&\; 0 \le y < \frac{7\pi}{4}\}$$
Postupy řádně zdůvodněte! (10 bodů)

4. Určete primitivní funkci na maximálních intervalech, kde existuje:
$$\int \frac{1}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}\ \mathrm{d}x$$
Postupy řádně zdůvodněte – pečlivě ověřte podmínky užívaných vět (včetně intervalů, na kterých platí)! (10 bodů)