4. Série domácích cvičení – termín odevzdání 3., resp. 6. 12. 2024

1. Mějme množinu $M = \{(x, y, z) \in R^3;\ x \sin z + y \cos z - e^z = 0\}$. (2 body)
Pomocí věty o implicitních funkcích:
(a) Ukažte, že tuto množinu lze na okolí bodu $a = (2, 1, 0)$ popsat jako graf funkce $z = z(x, y)$, kde $z(2, 1) = 0$.
(b) Spočtěte parciální derivace prvního řádu této funkce z v příslušném bodu a.
(c) Napište rovnici tečné roviny (pokud existuje) ke grafu funkce z v bodě a.

2. Najděte všechny globální a lokální extrémy následující funkce $f(x, y)$ (2 body)
na jejím definičním oboru: $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}$

3. Zjistěte maximální a minimální hodnoty funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$
na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$.
Využijte libovolných metod, ale detailně zdůvodněte. (2 body)
BONUS: Vyšetřete, zda má tato funkce i lokální extrémy. (2 body)

Pro zájemce o další procvičení (nejde o dom. úkol)

1. Najděte všechny body podezřelé z extrému, případně určete též lokální a globální extrémy následující funkce f (na celém definičním oboru):

$$f(x, y, z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$$

2. Najděte všechny body podezřelé z extrému, případně určete též lokální a globální extrémy následující funkce f (na celém definičním oboru

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pokud byste potřebovali, můžete využít skutečnost, že funkce f je spojitá a má tot. diferenciál na $\mathbb{R}^2$ (bylo za domácí úkol).