

3. Série domácích cvičení – termín 19. 11. a 22. 11. 2024

1. Mějme funkci $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$. (3 body)
Vypočítejte její totální diferenciál všude, kde existuje. Vyčíste jej v bodě $(1, 1, 1)$.

2. Mějme následující funkci: (4 body)

$$f(x, y) = 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{y}{x+1}}$$

- a) Najděte definiční obor funkce f a načrtněte jej.
b) Spočítejte parciální derivace všude, kde existují.
c) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě $[0, -3]$ a určete v tomto bodě její totální diferenciál.
d) Napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $[0, -3, 8]$.
e) Najděte lineární aproximaci funkce f v okolí bodu $[0, -3]$.

3. Necht $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$. (4 body)
Určete tečnou rovinu T , která je kolmá k přímce $\{[t, t, t] \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$.
Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$?

Tečná nadrovina. Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T , $x \in \mathbb{R}^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

4. Mějme funkci $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a funkce $r, s, t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: (4 body)
 $f(u, v, w) = u + vw$
 $r(x) = x^2, s(x) = x^3$ a $t(x) = \ln x$
a) Spočítejte všechny parciální derivace složené funkce $f(r(x), s(x), t(x))$.
Užijte maticové značení z přednášky!
b) Zkontrolujte výpočetem derivací přímo („postaru”).