2. Domácí úkol – termín odevzdání 8. 11. 2024 (oba kruhy)

1. Najdete definiční obor, zjistěte, zda je funkce omezená shora a zda je omezená zdola. Spočítejte všechny derivace prvního a druhého řádu: (2 bod)

   $f(x, y) = \ln(x^2 - 2x - y)$

2. Vypočtěte derivaci funkce $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ ve směru $(2, 1, 1)$ v bodě $(1, 1, 0)$. (2 bod)

3. Buď dána funkce $f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}$ (2 bod)

   a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
   b) Určete gradient funkce $\nabla f(x, y)$ v bodě $[1, 1]$.
   c) Je funkce f v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
   d) Aproximujte f pomocí diferenciálu v bodě [1,04; 0,99].

4. Zjistěte, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ dodefinovat tak, aby měla ve všech bodech R^2 totální diferenciál.

   Všude, kde existuje, totální diferenciál určete! (4 body)

Příklady k procvičování (na doma, pokud si nejste jistí a chtěli byste se pocvičit) – nejde o domácí úkol:

1. Buď dána funkce

$$f : (x, y) = \sqrt{\frac{1}{|1 - x^2 - y^2|}}$$

a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej. Pokud to lze, najděte fci F, která je spojitým rozšířením fce f na $\mathbb{R}^2$.
b) Vypočítejte gradient $\nabla f(x, y)$ v bodě $[1, 1]$. Zjistěte, v jakých bodech má fce f totální diferenciál. Pokud má fce f tot. diferenciál v b. $[1, 1]$, spočtěte ho.
c) Aproximujte hodnotu funkce f v bodě $[1, 02; 0, 99]$ pomocí totálního diferenciálu $D_{f(1,1)}$.
d) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[0, 0, ?]$.

2. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

3. Určete definiční obor následujících funkcí na $\mathbb{R}^{\ltimes}$, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslete.

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$