# 6. cvičení z MA II. (8. 11. a 12. 11. 2024)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

### A. Rozcvička a opakování

(a) Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ ve směru $v = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ a v bodě $a = (1,1)$. Jak souvisí totální diferenciál se směrovou derivací?

(b) Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ v bodě $a = (1,2,-1)$; jaká bude jeho hodnota ve směru $h = (-1,1,1)$?

(c) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ v bodě $(1,1,?)$.

### B. Řetízkové pravidlo.

**2.** Mějme funkce $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kde:

$f(x,y) = xe^{x+y}$
$g_1(r,s) = r\cos(s)$
$g_2(r,s) = r\sin(s)$

Složením dostaneme funkci $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad H(r,s) = f(g_1(r,s), g_2(r,s))$
(a) Spočítejte „postaru" její parciální derivace.
(b) Pomocí řetízkového pravidla spočítejte parciální derivace funkce $H$.
(c) Spočítejte totální diferenciál funkce $H$.
(d) Aproximujte pro malá $\epsilon$ hodnotu $H(1+\epsilon, \epsilon)$ (pomocí totálního diferenciálu).

**3.** Mějme funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$f(x,y) = x + xy + y/x$
$g(r,s) = (\sin(rs), r-s)^T$

Spočítejte všechny parciální derivace složené funkce $H = f \circ g$. Užijte maticové značení z přednášky! Jak toto souvisí s aproximací lineární funkcí?

### C. Záměnnost parciálních derivací vyšších řádů

**4.** Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací - vypočítejte je pro bod $(0,0)$:

$$f(x,y) = xy \text{ pro } |x| \geq |y| \quad \text{a} \quad f(x,y) = 0 \text{ pro } |x| < |y|$$