3. Cvičení z MA II. (15. a 18. 10. 2024)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. Spojitost reálných funkcí více proměnných (z minulé hodiny)

Jak se definuje spojité zobrazení? Jaká tvrzení o spojitých zobrazeních znáte? (skládání spoj. funkcí, charakteristika pomocí vzorů, charakteristika pomocí konv. posloupností)

1. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojité funkce $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (pro jednoduchost se omezme na polynomy dvou proměnných).

2. Zkoumejte následující funkci $f : \ D \subset \mathbb{R}^2 \to R$ (kde na $\mathbb{R}^2$ uvažujeme např. eukleidovskou metriku):

$f(x, y) = \sqrt{\log(x - y)}$.

Určete definiční obor této funkce (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice.
Nabývá tato funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

3. Lze následující funkce dodefinovat tak, aby byly na $\mathbb{R}^2$ spojité? Jak? Jsou tyto funkce omezené? Nabývají tam své největší a nejmenší hodnoty (pokud ano, jaké)?

(a) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

B. Parciální derivace

Parciální derivace. Nechť $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ G$ je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0]$ je i-tý vektor kanoniclé báze $\mathbb{R}^n$. *Parciální derivací funkce f podle i-té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).
Značení: $C^1(G)$ … množina funkcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc. derivace podle všech proměnných (tj. funkce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako funkce n proměnných).

1. Určete definiční obor následujících funkcí na $\mathbb{R}^n$, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslete.

(a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ v bodě $[1, -2]$

(b) $f(x, y, z) = (\frac{x}{y})^z$ v bodě $[e, 1, 2]$. Vypočtěte též parciální derivace 2. řádu!

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$

(d)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

2. Proč nestačí existence parciálních derivací pro spojitost?

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x = 0 \text{ nebo } y = 0 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení:

1a. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{y\cdot\mathrm{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x\cdot\mathrm{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}\cdot$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neex. pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ pro $y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ pro $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neex. pro $x \neq 0$

1b. $D_f = \{[x,y,z] \in R^3; x > 0, y > 0\} \cup \{[x,y,z] \in R^3; x < 0, y < 0\}$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot \frac{z}{x}$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot (-\frac{z}{y})$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot \ln\frac{x}{y}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot \frac{z}{x^2}(z-1)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot \frac{z}{y^2}(z+1)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot (\ln\frac{x}{y})^2$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -(\frac{x}{y})^z \cdot \frac{z^2}{xy}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = -(\frac{x}{y})^z \cdot \frac{1}{y}(z\ln\frac{x}{y} + 1)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot \frac{1}{x}(z\ln\frac{x}{y} + 1)$

1c. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{8y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neex., $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neex.

1d. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$