

10. cvičení z MA II. (6. 12. a 10. 12. 2024)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Riemannův integrál.

Jak je definovaný Riemannův integrál? Kdy existuje?

1. Spočítejte integrál $\int_0^1 x^2 dx$ dle definice Riemannova integrálu.

2. Jaký je vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem?

(a) Kdy se dá 'zaměnit' a počítat Riemannův integrál jako Newtonův?

(b) Vzpomeňte si na funkci, která má Newtonův integrál a nikoliv Riemannův integrál.

(c) Vzpomeňte si na funkci, která má Riemannův integrál a nikoliv Newtonův integrál.

3. Odbočka: Co to je stejnoměrná spojitost a jak se liší od spojitosti 'obyčejné'?

Jsou následující funkce na daných intervalech spojitě?

(i) $f(x) = x$ na \mathbb{R}

(ii) $f(x) = x^2$ na \mathbb{R}

(iii) $f(x) = x^2$ na $\langle 1, 5 \rangle$

4. Spočítejte následující integrály - na co je potřeba dát pozor při substituci, při per partes?

(i) $\int \exp(x) \sin(x) dx$

(ii) $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx$

(iii) $\int_1^e \ln(x) dx$

(iv) $\int_{e^{-1}}^e |\ln(x)| dx$

(v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7(x) \cos(x) dx$

(vi) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

B. Počítání integrálů.

5. Rozložte na parciální zlomky a pak integrujte:

(i) $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$

(ii) $\int \frac{4}{(x+2)(2x+1)} dx$

(iii) $\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} dx$

Co vše se může vyskytnout při rozkladu a jak dané integrály spočítat?

6. 'Chytré' substituce – vypočítejte na 'vhodných' intervalech pomocí následujících substitucí

(i) $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$ substituce $\cos(x) = t$

(ii) a teď s využitím substituce $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$

(iii) $\int \frac{1}{3 \sin^2(x)} dx$ pomocí substituce $\operatorname{tg}(x) = t$

7. Další procvičování:

(i) $\int \frac{1}{5+\cos(x)} dx$

(ii) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

(iii) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$