

10. cvičení z MA II. (6. 12. a 10. 12. 2024)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Aproximace pomocí Taylorovy řady.

Taylorova řada pro funkci jedné proměnné (definice): Necht $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na nějakém okolí a , která má v tomto bodě vlastní derivaci všech řádů. Pak Taylorovou řadou v bodě a rozumíme následující řadu, kde $x \in \mathbb{R}$:

$$T^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Taylorova řada pro funkci více proměnných:

Necht $a \in \mathbb{R}^n$ a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na nějakém okolí a , která má v tomto bodě spojité parciální derivace libovolného řádu. Pak Taylorovou řadou v bodě a rozumíme následující řadu (kde $x \in \mathbb{R}^n$):

$$T^{f,a}(x) = f(a) + \frac{1}{1!} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} (x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots$$

1. Aproximujte následující funkce f v okolí daného bodu a :

- (a) Pro připomenutí: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a = 0$, $f(x) = \sin(x)$
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \cdot \exp(x + y)$, $a = (0, 0)$
- (c) Lze aproximovat i funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$? Jak?