1. Cvičení z MA II. (1.10. a 4.10. 2024)

lopatkova@ufal.mff.cuni.cz
ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

1. Motivační příklad pro 2. semestr:
Nechť $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována předpisem:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \qquad\quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Je tato funkce spojitá vzhledem k jednotlivým proměnným (tedy jako funkce jedné proměnné)?
Jak je to s její spojitostí mimo bod $(0,0)$? A v bodě $(0,0)$?

Metrické prostory

Co je to metrický prostor? Jaké má vlastnosti metrika? K čemu jsou metriky?
Co je to okolí, otevřená a uzavřená množina? A koule o poloměru r?

2. Následující předpisy definují metrické prostory (M, d). Ověřte!

(a) absolutní hodnota: $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x - y|$

$M = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$:

(b) eukleidovská metrika: $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$
(založeno na Cauchy-Buňakovského nerovnosti: $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$)
Zobecnění: $d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$ $(p \geq 1)$, $p \in \mathbb{R}$

(c) manhattanská/součtová metrika: $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

(d) maximová metrika: $d_{max}(x,y) = \max\{|x_i - y_i|; 1 \leq i \leq n\}$

(e) pařížská metrika $(n = 2)$:
$d_{par}(x,y) = d_2(x,y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^2$ ležící na stejné polopřímce od bodu $(0,0)$,
jinak $d_{par}(x,y) = \|x\| + \|y\|$ (kde $\|.\|$ je eukleidovská norma)

(f) diskrétní metrika: $M \neq 0$, $d(x,y) = 1$ pro $x \neq y$, $d(x,y) = 0$ pro $x = y$

(g) prostor omezených funkcí na intervalu $[a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ se supremovou metrikou:
$M = F(a,b)$, $d_{sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, \text{ kde } x \in [a,b]\}$

(h) vzdálenost na neorientovaném souvislém grafu $G = (V, E)$:
$M = V$, $d(u,v)$ je počet hran na nejkratší cestě mezi u, v.

(i) editační vzdálenost:
Mějme konečnou abecedu znaků (např. $\Sigma = \{a, b, c\}$), pak slova jsou konečné řetězce znaků (kde prázdné slovo je též slovo, značíme λ). Řekneme, že dvě slova se liší jednou změnou, pokud jedno slovo získáme z druhého:
- vynecháním jednoho znaku (kdekoli ve slově);

- přidáním jednoho znaku (kdekoli ve slově);
- záměnou jednoho znaku za jiný (na dané pozici ve slově).

Vzdáleností (=metrikou) dvou slov je pak nejmenší počet změn, kterým se z jednoho slova získá slovo druhé.

3. Jak vypadá jednotková koule, tedy množina $B(a,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) < 1\}$, v prostoru $\mathbb{R}^n$
- s eukleidovskou metrikou,
- s manhattanskou/součtovou metrikou,
- s maximovou metrikou a
- s pařížskou metrikou?

4. Ukažte, že eukleidovská, manhattanská a maximová metrika jsou silně ekvivalentní.
Řekneme, že dvě metriky d_i, d_j na stejné množině M jsou silně ekvivalentní, pokud $\exists r, s \in (0, \infty)$ taková, že pro $\forall x, y \in M$ platí: $\quad r \cdot d_i(x,y) \leq d_j(x,y) \leq s \cdot d_i(x,y)$