

1. Série domácích cvičení – termín odevzdání 14. 3. 2024

1. Dokažte, že kartézský součin množiny celých čísel (tedy množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) je spočetná množina. (Sestrojte například příslušnou bijekci a zdůvodněte!) (3 body)
2. Najděte (pokud existují) supremum a infimum množiny $B \subset \mathbb{R}$, $B = \{\sin x \cos x; x \in \mathbb{R}\}$; existuje pro ni maximum a minimum – pokud ano, čemu se rovná? (3 body)
3. Necht $X_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 100/49\}$. V tělese $(\mathbb{Q}, <)$ najděte $\inf X_{\mathbb{Q}}$ a $\sup X_{\mathbb{Q}}$. Pokud existují, najděte též maximum a minimum.
Jak se výsledky změní, když v definici $X_{\mathbb{Q}}$ nahradíme \mathbb{Q} za \mathbb{N} , \mathbb{Z} (označme tyto množiny $X_{\mathbb{N}}$ a $X_{\mathbb{Z}}$)? A změní se něco, uvažujeme-li $X_{\mathbb{Q}}, X_{\mathbb{N}}, X_{\mathbb{Z}}$ v tělese v $(\mathbb{R}, <)$? (3 body)
4. Mějme číselnou množinu X , o které víme, že je neprázdná a má supremum. Dále mějme množinu čísel opačných, tedy $-X = \{-x \mid x \in X\}$.
Dokažte, že platí: (3 body)

$$\inf\{-X\} = -\sup\{X\}$$