(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot \ln(\operatorname{arctg} x + 1) = "\pm\infty\cdot 0" =$ **(A)**

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{arctg} x+1)}{x} = "\frac{0}{0}" \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{1} =$

(spoj. fce mimo 0)

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{arctg} x+1}\cdot\frac{1}{1+x^2} \overset{AL}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{arctg} x+1}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2} = \left(\frac{1}{0+1}\right)\cdot\frac{1}{(1+0}$

spoj. fce   spoj. fce $= 1$

---

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2\cdot\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$x\neq 0$ … spoj. (skládáme spoj. fce) mimo 0

$x=0$ … $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot\sin\frac{1}{x} = "0\cdot \text{omez. fce}" = 0$

$\Rightarrow f$ spoj. v 0

$\Rightarrow \boxed{f \text{ spoj. na } \mathbb{R}}$

$f'(x) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ mimo 0

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2\cdot\sin\frac{1}{h}-0}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} h\cdot\sin\frac{1}{h} = "0\cdot\text{omez. fce}" = 0$

(Vo lim derivace: | derivaci jako
f spoj. v 0 ✓
$\exists f'(x)$ v okolí 0 ✓
$\exists \lim f'(x)$ ✗)