

## 7. Cvičení z MA I. (4. 4. 2024)

### A. Funkce – spojitost, limita

1. Určete body, kde následující funkce nejsou spojité. Je možno je v těchto bodech spojitě dodefinovat?

(a)  $\frac{1}{x-15}$                       (b)  $|(x-2)(x+3)|$                       (c)  $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Předpokládejme, že reálné funkce  $f$  a  $g$  jsou definované na okolí bodu  $a$  a jsou v tomto bodě spojité. Jsou pak nutně v  $a$  spojité i funkce  $f + g$ ,  $f \cdot g$  a  $f/g$  (pokud  $g(a) \neq 0$ )?

3. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ , pokud  $a = 0, 1, +\infty, -\infty$   
(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$                       (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$                       (d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$   
(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$                       (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$                       (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$   
(h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$                       (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$                       (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

4. Sestrojte funkci  $f$  spojitou na  $(0, 1)$ , kterou ale nelze spojitě rozšířit na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

**Důležité: zapamatujte si, že platí!** (dokážeme později):

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$     (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$     (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

5. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x+1}{\sin x}$                       (b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$                       (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$   
(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-4^x}{\sin 2x}$                       (e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$                       (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$   
(g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2-x}\right)\right)^2$                       (h)\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^{2x-1}$                       (i)\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+7}\right)^x$

6. Spočítejte následující limitu (nebo dokažte, že neexistuje).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$$