

## 6. Cvičení z MA I. (28. 4. 2024)

### Funkce – spojitost (a limita)

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá? Kdy je funkce rostoucí?

1. Dokažte, že funkce  $f$  definovaná na intervalu  $I \subset \mathbb{R}$  je rostoucí, právě když platí

$$\forall x, y \in I, x \neq y : \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

2. Mějme funkci  $f$  definovanou na  $\mathbb{R}$ . Dokažte, že je-li  $f$  neklesající na  $(-\infty, a)$  a nerostoucí na  $\langle a, +\infty)$  pro nějaké  $a \in \mathbb{R}$ , pak  $f$  nabývá maxima.

3. Mějme funkci  $f$  definovanou na  $\mathbb{R}$  takovou, že  $f$  nabývá minima v bodě  $a \in \mathbb{R}$ . Musí existovat  $\epsilon > 0$  takové, že  $f$  je nerostoucí na  $(a - \epsilon, a)$  a neklesající na  $\langle a, a + \epsilon)$ ?

4. Které z následujících operací, provedeme-li je na neklesající funkce  $f$  a  $g$ , dává opět neklesající funkci?

- (a)  $f + g$       (b)  $f - g$       (c)  $\max\{f, g\}$       (d)  $\min\{f, g\}$       (e)  $f \circ g$

5. Nechť  $f$  a  $g$  jsou funkce definované na intervalu  $\langle 0, 1)$  takto:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0, 1) \\ 2 & \text{pro } x = 1. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocí definice zjistěte, zda mají tyto funkce limity v bodě 1 a případně jakou.