

5. Cvičení z MA I. (21. 3. 2024)

Posloupnosti a limity, řady

1. Spočítejte následující limity:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \cos(n^2)) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 5 \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor)}{n} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + (-1)^n}{-7} \right)^n$$
$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lfloor xk \rfloor}{n^2} \quad (\text{parametr } x \in \mathbb{R}^+, \lfloor x \rfloor \dots \text{ celá část } x, k \in \mathbb{N})$$

2. Ještě ke 'škále limit' – určete, čemu se rovnají následující limity (pro $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q^n \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n$$
$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} \quad (e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!}$$

ZÁVĚR: $n^n \gg n! \gg q^n \gg n^k$ (pro pevné $k \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$)

3. A ještě n -tá odmocnina:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \quad (\text{kde } a \geq 0, a \in \mathbb{R} \text{ je pevný parametr})$$
$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \quad (\text{viz přednáška 2, tvrzení 8})$$
$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$$

4. Dokažte, zda následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, případně ji spočítejte:

$$(a) a_1 = \sqrt{c} \quad (c > 0, c \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$
$$(b) a_1 = t \quad (t > 0, t \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

5. Najděte hromadné body, $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ $\liminf_{n \rightarrow \infty}$, posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$, kde

$$(a) a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \quad (b) b_n = n - 4 \lfloor \frac{n}{4} \rfloor \quad (c) c_n = (-1)^n \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)$$

6. Jak definujeme nekonečnou řadu? Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{6^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Příště: funkce a spojitost