Doplněk ke cvičení z MA I.

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Aplikace integrálu.

A. Plocha pod křivkou ... viz definici R. integrálu.
Pro křivku $y = f(x)$ (pro $x \in [a, b]$) má plocha pod křivkou obsah $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

B. Délka křivky ... viz domácí úkol.
Délka křivky $y = f(x)$ (pro $x \in [a, b]$) je dána předpisem $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ \mathrm{d}x$.

(a) Najděte délku křivky $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ na intervalu $x \in [0, 3]$.

C. Objem rotačního tělesa.
Objem rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = f(x)$ (pro $x \in [a, b]$) kolem osy x je $\int_a^b \pi(f(x))^2\ \mathrm{d}x$.

(a) Nechť M je oblast ohraničená grafem funkce $f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x}$ a osou x na intervalu $[0, \pi]$. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací M kolem osy x.

(b) Vypočtěte objem těleso vzniklého rotací funkce $y = \sqrt[3]{x}$ pro $y \in [1, 2]$ kolem osy y.

D. Povrch rotačního tělesa.
Povrch tělesa vzniklého rotací křivky $y = f(x)$ (pro $x \in [a, b]$) kolem osy x je $\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ \mathrm{d}x$.

(a) Povrch paraboloidu (satelitní antény) vzniklého rotací křivky $y = c\sqrt{x}$ pro $x \in [0, b]$.

(b) Povrch nekonečného “trychtýře” vzniklého rotací funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in [1, \infty)$ kolem osy x.