13. Cvičení z MA I. (15. 5. 2024)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Newtonův integrál

1. Spočítejte následující Newtonovy integrály (případně zdůvodněte, že neexistují).

(a) $\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (b) $\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x$ (c) $\int_0^5 |x^2 - 3x + 2| \,\mathrm{d}x$

(d) $\int_a^b \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x$ (e) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$ (f) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3} \,\mathrm{d}x$

(g) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$ (h) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| \,\mathrm{d}x$

Riemannův integrál.

2. Určete z definice hodnotu Riemannova integrálu $(R)\int_{-2}^2 \lfloor x \rfloor \ \mathrm{d}x$.

3. S použitím Riemannova integrálu:

(a) Odhadněte shora číslo $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ a na základě toho dokažte, že řada $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ konverguje.

(b) Odhadněte zdola číslo $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ a na základě toho dokažte, že řada $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ diverguje.

Jaký je vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem?

Výsledky: (Případné chyby prosím reportujte emailem!)

1. (Newtonův integrál)

(a) $\alpha > -1: \ \frac{1}{\alpha+1}$; $\quad \alpha < -1$: NEEX. $\left(\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = +\infty\right)$; $\quad \alpha = -1$: NEEX. $\left([\ln|x|]_0^1 = +\infty\right)$

(b) NEEX. ($[-\cos x]_0^1$ neex.)

(c) $\frac{29}{2}$

(d) $0 < a < b: \ b - a$; $\quad a < b < 0: \ a - b$; $\quad a < 0 < b$: NEEX. (nemá prim. fci)

(e) $\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(f) $\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ \operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ \operatorname{arctg}\frac{e}{\sqrt{3}} - \ \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ \operatorname{arctg}\frac{e}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$

(g) NEEX. ($\left[\cos\frac{1}{x}\right]_0^1$ neex.)

(h) $2(1 - \frac{1}{e})$

3. (Riemannův integrál)

(a) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = 2 - \frac{1}{n} \to 2$

(b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln n \to +\infty$