Tahák k integrálům (9. 5. 2023)

Newtonův integrál

DEF: Mějme funkci f definovanou na otevřeném neprázdném intervalu (a,b), $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$. Tato funkce má na intervalu (a,b) *Newtonův integrál*, když má na tomto intervalu primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity $F(a^+)=\lim_{x\to a^+}F(x)$ a $F(b^-)=\lim_{x\to b^-}F(x)$.
Newtonův integrál funkce f na intervalu (a,b) pak definujeme jako

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ := F(b^-)-F(a^+)=\lim_{x\to b^-}F(x)-\lim_{x\to a^+}F(x) \quad (=: [F]_a^b)$$

V (*Per partes pro určitý integrál*): Nechť f a g jsou spojité funkce na $[a,b]$ a nechť tyto funkce mají na (a,b) primitivní funkce F a G takové, že je lze spojitě rozšířit na $[a,b]$. Potom existují dva určité integrály z následujícího výrazu a platí následující rovnost:

$$(N)\int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x \ = [FG]_a^b-(N)\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

V (*Substituce pro určitý integrál*): Nechť $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ je spojitá a má ve všech bodech (α,β) vlastní derivaci. Označme $J:=\varphi((\alpha,\beta))$.
(Ze spojitoti φ na $[\alpha,\beta]$ víme, že J je omezený … nestačí kontrolovat na $\varphi((\alpha,\beta))$**!!!**)
Nechť f je spojitá na J a newtonovsky integrovatelná na vnitřku J. Potom:

$$(N)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \ = (N)\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Riemannův integrál.

DEFINICE: Mějme čísla $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$.
Konečná $(k+1)$-tice bodů $D=(a_0,a_1,\dots a_k)$, $a_i\in[a,b]$ je dělením *dělením intervalu* $[a,b]$, pokud $a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_k=b$.
Označme intervaly $I_i=[a_i,a_{i+1}]$ a jejich délku jako $|I_i|(=a_{i+1}-a_i)$, obdobně $[a,b]=b-a$.

(i) Pro funkci $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ a dělení $D=(a_0,a_1,\dots a_k)$ intervalu $[a,b]$ definujeme *dolní*, respektive *horní Riemmanovu sumu* jako:

$$s(f,D)=\sum_{i=0}^{k-1}|I_i|m_i \text{ , resp. } S(f,D)=\sum_{i=0}^{k-1}|I_i|M_i \text{ ,}$$

kde $m_i=\inf\{f(x)\mid x\in I_i\}$ a $M_i=\sup\{f(x)\mid x\in I_i\}$.
(Tyto sumy jsou vždy definované, $s(f,D)\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $S(f,D)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.)

(ii) *Dolní*, resp. *horní Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a,b]$ definujeme jako

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\sup\{s(f,D)\mid D \text{ je dělení } [a,b]\} \text{ , resp. } \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\inf\{S(f,D)\mid D \text{ je dělení } [a,b]\}\ .$$

(Tyto výrazy jsou vždy definované, $\underline{\int_a^b} f, \overline{\int_a^b} f\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

(iii) Řekneme, že funkce f má na $[a,b]$ *Riemannův integrál (je riemannovsky integrovatelná)*, pokud se dolní a horní Riemannův integrál rovnají a jsou konečné – tuto hodnotu označujeme jako $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (případně $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$).

PLATÍ: Pro každou f na $[a,b]$ platí, že $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

PLATÍ: (Kritérium integrovatelnosti) Nechť je f definovaná na $[a,b]$. Potom $\exists$ $(R)\int_a^b f$ právě tehdy, když

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists D: \; S(f,D) - s(f,D) < \epsilon$$

PLATÍ: Každá riemanovsky integrovatelná funkce je omezená.

PLATÍ: "aritmetika" R. integrálů ($\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$).

PLATÍ: "linearita" vzhledem k integračním intervalům ($\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ pro $a < c < b$ a pokud má aspoň jedna strana smysl)

PLATÍ: funkce lišící se v kon. mnoha bodech mají stejný R. integrál

PLATÍ: Je-li funkce f na $[a,b]$ monotónní, pak je R. integrovatelná.

PLATÍ: Je-li funkce f na $[a,b]$ spojitá, pak je R. integrovatelná.

Jaký je vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem?

1. ZÁKLADNÍ VĚTA ANALÝZY:
Nechť funkce f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál (tj. $f \in R([a,b])$ a funkce $F(a,b) \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$F(x) = (R)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Potom:
(i) F je na $[a,b]$ spojitá a
(ii) v každém bodě spojitosti $x_0 \in [a,b]$ funkce f existuje vlastní $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$ (platí to jednostranně, pokud $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$).

2. ZÁKLADNÍ VĚTA ANALÝZY:
Mějme funkce f, F: $[a,b] \to \mathbb{R}$, kde F je primitivní k f na (a,b) (tj. $F' = f$ na (a,b)) a f má Riemannův integrál (tj. $f \in R([a,b])$).
PAK

$$(R)\int_a^b f = F_b - F_a = (N)\int_a^b f$$

(kde $F_a := \lim_{x\to a} F(x)$ a $F_b := \lim_{x\to b} F(x)$ jsou vlastní limity, které za daných předpokladů existují)
