12. Cvičení z MA I. (9. 5. 2024)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Primitivní funkce

DEF: Mějme funkci f definovanou na otevřeném neprázdném intervalu I. Existuje-li na tomto intervalu funkce F, která má pro všechna $x \in I$ vlastní derivaci a platí $F'(x) = f(x)$, řekneme, že F je na I primitivní k f.

V: Je-li F na I primitivní funkce k nějaké funkci f, pak je F na I spojitá.

V: Spojitá funkce f na otevřeném neprázdném intervalu I má na tomto intervalu primitivní funci (tj. podmínka postačující, nikoli nutná).

V: Má-li funkce f na intervalu I primitivní funkci, pak je obraz $f(I)$ též interval (tedy funkce má Darbouxovu vlastnost, tj. nabývá mezihodnot).

Metody pro výpočet primitivní funkce:
- tabulkové integrály (viz)
- per partes
- substituce ... zde jen 1. typu
- rozklad na parc. zlomky (zde jen pro rac. lomené funkce s $\mathbb{R}$ kořeny)

---

1. Určete primitivní funkce k následujícím funkcím (na největších možných intervalech):

(a) $\int x^3 + 2x + \frac{16}{x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int (3e^x + \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ (e) $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x$ (g) $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$

(h) $\int (\sqrt[3]{x} + x^2)\,\mathrm{d}x$ (i) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (j) $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$, kde $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

2. ‘Lepení’ primitivních funkcí – určete primitivní funkco na největším možném intervalu:

(a) $\int |x|\,\mathrm{d}x$ (b) $\int |\cos x|\,\mathrm{d}x$

3. Určete primitivní funkce: metoda per partes:

(a) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int (x^2 - x)\exp(x)\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \exp(x)(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \ln|1 + x|\,\mathrm{d}x$ (e)* $\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x\,\mathrm{d}x$ (f)* $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

4. Určete primitivní funkce: metoda substituce

(a) $\int 2x \cdot \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \sqrt[3]{1 - 3x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}}\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (i) $\int \exp(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

5. Určete primitivní funkce: doplnění na čtverec a rozklad na parciální zlomky

(a) $\int \frac{x^2+2x}{x+3}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x$

(d)* $\int \frac{1}{(3x^2-2x-1)}\,\mathrm{d}x$ (e)* $\int \frac{3x+4}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}\,\mathrm{d}x$

Výsledky: (Primitivní funkce až na $c \in \mathbb{R}$ - případné chyby prosím reportujte emailem!)

1. (tabulkové integrály)

(a) $\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} + 16 \ln|x|$, na $(-\infty; 0), (0; +\infty)$

(b) $18e^x + 2e^{8x} - \ln|x| + 3\sin x$, na $(-\infty; 0), (0; +\infty)$

(c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x$, na $\mathbb{R}$

(d) $3e^x + \ln|x|$, na $(-\infty; 0), (0; +\infty)$

(e) $\mathrm{tg}\ x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

(f) $\frac{x^2}{2} - \ln|x|$, na $(-\infty; 0), (0; +\infty)$

(g) $\mathrm{tg}\ x - x$, na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

(h) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^4} + \frac{x^3}{3}$, na $\mathbb{R}$

(i) $-2\frac{1}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, na $(0; +\infty)$

(j) $n \neq 1:\ \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, na $(-\infty; a), (a; +\infty)$; $\quad n = 1:\ \ln|x-a|$, na $(-\infty; a), (a; +\infty)$

2. ("lepení" prim. fcí)

(a) $\mathrm{sgn}\ x \cdot \frac{x^2}{2}$, na $\mathbb{R}$

(b) na každém intervalu $\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\rangle,\ k \in \mathbb{Z}$ předpis $F(x) = (-1)^k \sin x + 2k$ (tj. def. na $\mathbb{R}$)

3. (per partes)

(a) $-x\cos x + \sin x$, na $\mathbb{R}$

(b) $e^x(x^2 - 3x + 3)$, na $\mathbb{R}$

(c) $e^x \cdot \sin x$, na $\mathbb{R}$

(d) $x\ln|1+x| - x + \ln|1+x|$, na $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$

(e) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} \cdot (\ln^2 x - \frac{2}{3}\ln x + \frac{8}{9})$, na $(0; +\infty)$

(f) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \mathrm{tg}\ x\right)$, na $\mathbb{R}$

4. (substituce)

(a) $-e^{-x^2}$, na $\mathbb{R}$

(b) $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4}$, na $\mathbb{R}$

(c) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, na $\mathbb{R}$

(d) $\frac{1}{5}\sqrt{2+5x^2}$, na $\mathbb{R}$

(e) $\frac{1}{3}\ln^3 x$, na $(0; +\infty)$

(f) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}$, na $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

(g) $-\ln|\cos x|$, na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

(h) $2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x})$, na $(0; +\infty)$

(i) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$, na $(0; +\infty)$

5. (parc. zlomky)

(a) $\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x+3|$, na $(-\infty; -3), (-3; +\infty)$

(b) $\frac{3}{2}\ln|x^2+3x+5| - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{11}}(x+\frac{3}{2})\right)$, na $\mathbb{R}$

(c) $\ln|x-2| + \ln|x+5|$, na $(-\infty; -5), (-5; 2), (2; +\infty)$

(d) $\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|3x+1|$, na $(-\infty; -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}; 1), (1; +\infty)$

(e) $\ln\frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$, na $(-\infty; 0), (0; 1), (1; +\infty)$

(f) $\frac{1}{3}\arcsin(x - \frac{1}{3})$, na $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$