1. Cvičení z MA I. (22. 2. 2024)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. Výroková logika

1. Který z následujících výroků je 'silnější', tj. implikuje druhý z výroků?

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists K \in \mathbb{R},\ K > 0$ takové, že platí $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

(b) $\exists K \in \mathbb{R},\ K > 0$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

2. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

(a) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N}$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(b) $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N}$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(c) $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{R}$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

3. Jak probíhá důkaz? Jak byste jednotlivé typy důkazů popsali pomocí logických výroků?

(a) Co je přímý důkaz? Ukažte, že pro těleso s lineárním uspořádáním $(T, +, \cdot, <)$ platí:
$\forall a \in T:\ (a > 1) \rightarrow (a^2 > 1)$.

(b) Co je nepřímý důkaz? Ukažte, že pro těleso s lineárním uspořádáním $(T, +, \cdot, <)$ platí:
$\forall a, b \in T : (a \cdot b = 0) \rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$

(c) A co je důkaz sporem? Ukažte, že $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (kde $\mathbb{Q}$ je těleso racionálních čísel).

B. Zobrazení a funkce

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti funkce: omezenost, maximum/minimum; funkce prostá a funkce 'na'.

4. Najděte příklady funkcí f_1, f_2, f_3 z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ s následujícími vlastnostmi:

(a) f_1 je 'na', ale není prostá

(b) f_2 je prostá, ale není 'na'

(c) f_3 je 'na' a každé přirozené číslo má nekonečně mnoho vzorů.

5. Mějme zobrazení $f : X \rightarrow Y$ a množiny $A, B \subset X$. Jaké musí mít f, A, B vlastnosti, aby platily následující vztahy?

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) Jaký je obecný vztah mezi množinami A a $f^{-1}(f(A))$?

6. Najděte funkci, která zobrazuje:

(a) interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$

(b) interval $[0, 1]$ na interval $(0, 1)$

(c) interval $(0, 1)$ na interval $(0, \infty)$

(d) interval $(0, 1)$ na interval $(-\infty, \infty)$

(e) interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$

(f) interval $(0, \infty)$ na interval $(0, 1)$

7. Vyhovuje funkce $f(x) = \sin x \quad (f : \mathbb{R} \to [-1, 1])$ následujícímu výroku, nebo jeho negaci?

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R},\ K > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : x > K \to |f(x)| < \epsilon$$

C. Přirozená, racionální a reálná čísla

Co to je „mohutnost“ konečné množiny a nekonečné množiny? Jak se definuje spočetnost?

8. Dokažte, že následující množiny jsou spočetné:

(a) množina celých čísel $\mathbb{Z}$

(b) množina dvojic přirozených čísel, tedy $\mathbb{N}^2$

(c) racionálních čísel $\mathbb{Q}$.

9. Nechť A je neprázdná množina reálných čísel ($A \subseteq \mathbb{R}$, navíc $A \neq \emptyset$). Víte, že neexistuje minimum A.

(a) Zapište formálně pomocí matematických symbolů výrok T „A má minimumn“ a pak ho znegujte.

(b) Dokažte, že A je nekonečně velká (aspoň spočetně velká).