## 9. a 10. Cvičení z MA I. (11. a 18. 5. 2023)

**Markéta Lopatková**

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

**Průběhy funkcí – POSTUP:**

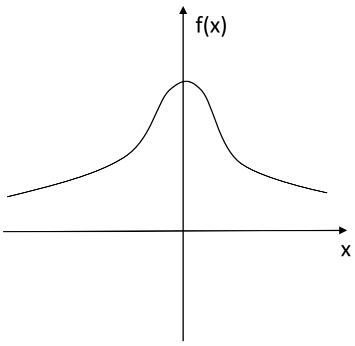
1. definiční obor $D_f$
2. průsečíky s osami
3. spojitost; sudost/lichost; periodicita
4. limitní chování v krajních bodech a v "podezřelých" bodech Df
5. asymptoty v $\pm\infty$
   ($p(x) = ax + b$ , kde $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax)$)
6. první derivace v $D_f$; jednostranné derivace v krajních bodech
7. podezřelé body – diskuse (lok. a glob. max/min); monotonie
8. konvexita/konkávita – **úvahou** nebo druhá derivace
   ($f'' > 0$ kon**V**exní $\smile$ (= cup); $f'' < 0$ konk**Á**vní $\frown$ (= cave))
9. graf funkce

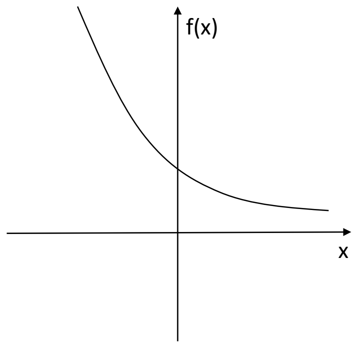
**Rozcvička:**

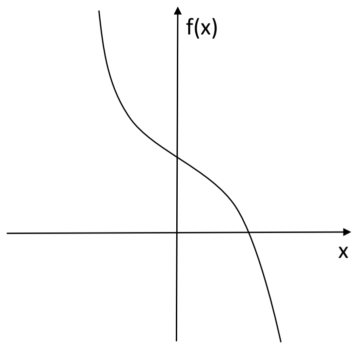
Nechť $f$ je funkce s následujícími vlastnostmi:

– $f(x) > 0$ pro všechna $x > 0$,
– $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x$ a
– $f'(0) = 0$

Mohl by některý z následujících obrázků být grafem této funkce?








**1.** Ukázkové příklady - vyšetřete průběh funkce, najděte extrémy a načrtněte grafy:

(a) $\sqrt[3]{(x^4-1)^2}$ (b) $\sin x - |\cos x|$ (c) $|x| \cdot \exp(-|x-1|)$

(d) $$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\sin^2 x}) & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**2.** Dokažte následující tvrzení:

(a) $\exp(x) \geq x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$

(b) Obdélník minimalizující obvod při daném obsahu je čtverec.

**3.** Další příklady na průběh funkcí. Nabývají tyto funkce globálních a lokálních extrémů (= lok. maxim a minim, (neostrých) glob. maxim a minim)?

**polynomy:**

(a) $f_1(x) = x^2 - x^4$ (b) $f_2(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$

**racionální (lomené) funkce:**

(a) $f_1(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (b) $f_2(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$

**(c)** $g(x) = \begin{cases} \frac{|1+2x|}{\sqrt{1-2x+x^2}} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

**gonio/cyklometrické funkce:**

(a) $f_1(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ **(b)** $\arccos\left|\frac{1-x}{1-2x}\right|$

**exponenciála:**

(a) $f_1(x) = e^x - x$ **(b)** $x^x$ (c) $f_3(x) = x^{1/x}$

**(d)** $f_4(x) = |x-1| \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$ **(e)** $f_n(x) = e^x(x+1)^n \quad n \in \mathbb{N}$