

7. Cvičení z MA I. (28. 3. 2023)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Funkce – spojitost, limita

1. Určete body, kde následující funkce nejsou spojité. Je možno je v těchto bodech spojitě dodefinovat?

(a) $\frac{1}{x-15}$ (b) $|(x-2)(x+3)|$ (c) $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

2. Předpokládejme, že reálné funkce f a g jsou definované na okolí bodu a a jsou v tomto bodě spojité. Jsou pak nutně v a spojité i funkce $f+g$, $f \cdot g$ a f/g (pokud $g(a) \neq 0$)?

3. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, pokud $a = 0, 1, +\infty, -\infty$
(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$
(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$
(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ (j) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

4. Sestrojte funkci f spojitou na $(0, 1)$, kterou ale nelze spojitě rozšířit na $\langle 0, 1 \rangle$.

Důležité: zapamatujte si, že platí! (dokážeme později):

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

5. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\sin x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-4^x}{\sin 2x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$
(g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\arctg\left(\frac{1}{2-x}\right)\right)^2$ (h)* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^{2x-1}$ (i)* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+7}\right)^x$

6. Spočítejte následující limitu (nebo dokažte, že neexistuje).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1} \right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$$