

## 6. Cvičení z MA I. (21. 3. 2023)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

### Funkce – spojitost, limita

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá? Kdy je funkce rostoucí?

1. Dokažte, že funkce  $f$  definovaná na intervalu  $I \subset \mathbb{R}$  je rostoucí, právě když platí

$$\forall x, y \in I, x \neq y : \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

2. Mějme funkci  $f$  definovanou na  $\mathbb{R}$ . Dokažte, že je-li  $f$  neklesající na  $(-\infty, a)$  a nerostoucí na  $\langle a, +\infty)$  pro nějaké  $a \in \mathbb{R}$ , pak  $f$  nabývá maxima.

3. Mějme funkci  $f$  definovanou na  $\mathbb{R}$  takovou, že  $f$  nabývá minima v bodě  $a \in \mathbb{R}$ . Musí existovat  $\epsilon > 0$  takové, že  $f$  je nerostoucí na  $(a - \epsilon, a)$  a neklesající na  $\langle a, a + \epsilon)$ ?

4. Které z následujících operací, provedeme-li je na neklesající funkci  $f$  a  $g$ , dává opět neklesající funkci?

- (a)  $f + g$             (b)  $f - g$             (c)  $\max\{f, g\}$             (d)  $\min\{f, g\}$             (e)  $f \circ g$

5. Necht  $f$  a  $g$  jsou funkce definované na intervalu  $\langle 0, 1)$  takto:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0, 1) \\ 2 & \text{pro } x = 1. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocí definice zjistěte, zda mají tyto funkce limity v bodě 1 a případně jakou.

6. Sestrojte funkci  $f$  spojitou na  $(0, 1)$ , kterou ale nelze spojitě rozšířit na  $\langle 0, 1)$ .

7. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ , pokud  $a = 0, 1, +\infty, -\infty$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$             (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$             (d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$             (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$             (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$             (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$             (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

**Důležité: zapamatujte si, že platí!** (dokážeme později):

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$    (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$    (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$    (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$