5. Cvičení z MA I. (14. 3. 2023)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. posloupnosti a limity, řady

1. Spočítejte následující limity:

(a) $\lim_{n\to\infty}(n+\cos(n^2))$ (b) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3})$ (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-5\cdot\lfloor\frac{n}{5}\rfloor)}{n}$

(d) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+(-1)^n}{-7}\right)^n$ (f) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$

(g) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\lfloor xk\rfloor}{n^2}$ (parametr $x\in\mathbb{R}^+$, $\lfloor x\rfloor$ ... celá část $x, k\in\mathbb{N}$)

2. Ještě ke 'škále limit' – určete, čemu se rovnají následující limity (pro $q\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}$):

(a) $\lim_{n\to\infty}q^n$ (b) $\lim_{n\to\infty}n\cdot q^n$ (c) $\lim_{n\to\infty}n^k\cdot q^n$

(d) $\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!}$ (e) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$ (f) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n!}$

ZÁVĚR: $n^n >> n! >> q^n >> n^k$ (pro pevné $k\in\mathbb{N}$ a $q\in\mathbb{R},\ q>1$)

3. A ještě $n-$tá odmocnina:

(a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ (kde $a\geq 0, a\in\mathbb{R}$ je pevný parametr)

(b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ (viz přednáška 2, tvrzení 8)

(c) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$

4. Dokažte, zda následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, případně ji spočítejte:

(a) $a_1=\sqrt{c}$ $(c>0,\ c\in\mathbb{R})$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}$ pro každé $n\in\mathbb{N}$

(b) $a_1=t$ $(t>0,\ t\in\mathbb{R})$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ pro každé $n\in\mathbb{N}$

5. Najděte hromadné body, $\limsup_{n\to\infty}\liminf_{n\to\infty}$, posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$, kde

(a) $a_n=\sin(\frac{n\pi}{3})$ (b) $b_n=n-4\lfloor\frac{n}{4}\rfloor$ (c) $c_n=(-1)^n\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)$

6. Jak definujeme nekonečnou řadu? Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^{n+1}}{6^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Příště: funkce a spojitost