4. Cvičení z MA I. (7. 3. 2023)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Na webu viz druhou sérii domácích úkolů – termín odevzdání 21. 3. 2023!

Limity posloupností

1. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení ($\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel):

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$

2. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}$ (b) $\lim_{n\to\infty} n^3 - 2n^2 + 10$ (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n^2$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$ (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+5^n+10^n}{-2^{n+1}+5^{n+1}+10^{n+1}}$ (f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+5}-\sqrt{n-1}$

(g) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$ (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$ (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n+2} - \frac{n}{2}$

3. Mějme dvě posloupnoti reálných čísel $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a číslo $c \in \mathbb{R},\ c > 0$ – dokažte následující:

(a) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pak $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = +\infty$.

(b) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ omezená, pak $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

4. Najděte posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ ($a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$) takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a že:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

5. 'Škála limit' – určete, čemu se rovnají následující limity (pro $q \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$):

(a) $\lim_{n\to\infty} q^n$ (b) $\lim_{n\to\infty} n \cdot q^n$ (c) $\lim_{n\to\infty} n^k \cdot q^n$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!}$ (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!}$

ZÁVĚR: $n^n >> n! >> q^n >> n^k$ (pro pevné $k \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R},\ q > 1$)

6. A ještě $n-$tá odmocnina:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ (kde $a \geq 0, a \in \mathbb{R}$ je pevný parametr)

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ (viz přednáška 2, tvrzení 8)

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$