

2. Cvičení z MA I. (21. 2. 2023)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Na webu viz první sérii domácích úkolů – termín odevzdání 26.3.2021!

1. **Rozcvička** Najděte funkci, která zobrazuje:

- (a) interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$
- (b) interval $[0, 1]$ na interval $(0, 1)$
- (c) interval $(0, 1)$ na interval $(0, \infty)$
- (d) interval $(0, 1)$ na interval $(-\infty, \infty)$
- (e) interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$
- (f) interval $(0, \infty)$ na interval $(0, 1)$

Přirozená, racionální a reálná čísla; spočetnost

Co to je „mohutnost“ konečné množiny a nekonečné množiny? Jak se definuje spočetnost?

2. Dokažte, že následující množiny jsou spočetné:

- (a) množina celých čísel \mathbb{Z} ;
- (b) množina dvojic přirozených čísel, tedy \mathbb{N}^2 ; jak lze upravit pro racionální čísla \mathbb{Q} ?
- (c) množina všech řetězců nad abecedou $A = \{a, b\}$ (hledáme tzv. lexikografické uspořádání).

3. Ukažte, že množina všech podmnožin přirozených čísel není spočetná

Supremum a infimum

Co to je supremum (infimum) množiny?

Co víte o množině \mathbb{Q} a \mathbb{R} čísel z hlediska existence suprema?

4. Dokažte, že racionální čísla tvoří hustou podmnožinu reálných čísel, tedy že pro každou dvojici reálných čísel a, b ($a < b$) existuje racionální číslo q takové, že $a < q < b$.

5. Necht A je neprázdná množina reálných čísel ($A \subseteq \mathbb{R}$, navíc $A \neq \emptyset$). O A víte, že neexistuje její minimum.

- (a) Zapište formálně pomocí matematických symbolů výrok T „ A má minimum“ a pak ho negujte.
- (b) Dokažte, že A je nekonečně velká (aspoň spočetně velká).

6. Najděte suprema a infima následujících množin nad reálnými čísly (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

- (a) $A_1 = \{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$
- (b) $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}\}$
- (c) $A_3 = \{n^{(-1)^n}; n \in \mathbb{N}\}$
- (d) $A_4 = \{q < \sqrt{3}; q \in \mathbb{Q}\}$