

Tahák k integrálům (9. 5. 2023)

Newtonův integrál

DEF: Mějme funkci f definovanou na otevřeném neprázdném intervalu (a, b) , $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tato funkce má na intervalu (a, b) *Newtonův integrál*, když má na tomto intervalu primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity $F(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ a $F(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$.

Newtonův integrál funkce f na intervalu (a, b) pak definujeme jako

$$(N) \int_a^b f(x) dx := F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \quad (=: [F]_a^b)$$

V (*Per partes pro určitý integrál*): Nechť f a g jsou spojitě funkce na $[a, b]$ a nechť tyto funkce mají na (a, b) primitivní funkce F a G takové, že je lze spojitě rozšířit na $[a, b]$. Potom existují dva určité integrály z následujícího výrazu a platí následující rovnost:

$$(N) \int_a^b f(x)G(x) dx = [FG]_a^b - (N) \int_a^b F(x)g(x) dx$$

V (*Substituce pro určitý integrál*): Nechť $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a má ve všech bodech (α, β) vlastní derivaci. Označme $J := \varphi((\alpha, \beta))$.

(Ze spojitosti φ na $[\alpha, \beta]$ víme, že J je omezený ... nestačí kontrolovat na $\varphi((\alpha, \beta))$!!!)

Nechť f je spojitá na J a newtonovsky integrovatelná na vnitřku J . Potom:

$$(N) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = (N) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$$

Riemannův integrál.

DEFINICE: Mějme čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Koněčná $(k+1)$ -tice bodů $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$, $a_i \in [a, b]$ je dělením *dělením intervalu* $[a, b]$, pokud $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$.

Označme intervaly $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ a jejich délku jako $|I_i| (= a_{i+1} - a_i)$, obdobně $[a, b] = b - a$.

(i) Pro funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a dělení $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ definujeme *dolní*, respektive *horní Riemmanovu sumu* jako:

$$s(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i, \text{ resp. } S(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| M_i,$$

kde $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in I_i\}$ a $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in I_i\}$.

(Tyto sumy jsou vždy definované, $s(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $S(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.)

(ii) *Dolní*, resp. *horní Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a, b]$ definujeme jako

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup\{s(f, D) \mid D \text{ je dělení } [a, b]\}, \text{ resp. } \overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{S(f, D) \mid D \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

(Tyto výrazy jsou vždy definované, $\underline{\int_a^b} f, \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.)

(iii) Řekneme, že funkce f má na $[a, b]$ *Riemannův integrál (je riemannovsky integrovatelná)*, pokud se dolní a horní Riemannův integrál rovnají a jsou konečné – tuto hodnotu označujeme jako $\int_a^b f(x) dx$ (případně $(R) \int_a^b f(x) dx$).

PLATÍ: Pro každou f na $[a, b]$ platí, že $\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}$.

PLATÍ: (Kritérium integrovatelnosti) Nechť je f definovaná na $[a, b]$. Potom $\exists (R) \int_a^b f$ právě tehdy, když

$$\forall \epsilon > 0 \exists D : S(f, D) - s(f, D) < \epsilon$$

PLATÍ: Každá riemannovsky integrovatelná funkce je omezená.

PLATÍ: “aritmetika” R. integrálů $(\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g)$.

PLATÍ: “linearita” vzhledem k integračním intervalům $(\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ pro $a < c < b$ a pokud má aspoň jedna strana smysl)

PLATÍ: funkce lišící se v kon. mnoha bodech mají stejný R. integrál

PLATÍ: Je-li funkce f na $[a, b]$ monotónní, pak je R. integrovatelná.

PLATÍ: Je-li funkce f na $[a, b]$ spojitá, pak je R. integrovatelná.

Jaký je vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem?

1. ZÁKLADNÍ VĚTA ANALÝZY:

Nechť funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má Riemannův integrál (tj. $f \in R([a, b])$) a funkce $F(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$F(x) = (R) \int_a^x f(t) dt .$$

Potom:

- (i) F je na $[a, b]$ spojitá a
- (ii) v každém bodě spojitosti $x_0 \in [a, b]$ funkce f existuje vlastní $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$ (platí to jednostranně, pokud $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$).

2. ZÁKLADNÍ VĚTA ANALÝZY:

Mějme funkce $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kde F je primitivní k f na (a, b) (tj. $F' = f$ na (a, b)) a f má Riemannův integrál (tj. $f \in R([a, b])$).

PAK

$$(R) \int_a^b f = F_b - F_a = (N) \int_a^b f$$

(kde $F_a := \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ a $F_b := \lim_{x \rightarrow b} F(x)$ jsou vlastní limity, které za daných předpokladů existují)
