

12. Cvičení z MA I. (2. 5. 2023)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Primitivní funkce

DEF: Mějme funkci f definovanou na otevřeném neprázdném intervalu I . Existuje-li na tomto intervalu funkce F , která má pro všechna $x \in I$ vlastní derivaci a platí $F'(x) = f(x)$, řekneme, že F je na I primitivní k f .

V: Je-li F na I primitivní funkce k nějaké funkci f , pak je F na I spojitá.

V: Spojitá funkce f na otevřeném neprázdném intervalu I má na tomto intervalu primitivní funkci (tj. podmínka postačující, nikoli nutná).

V: Má-li funkce f na intervalu I primitivní funkci, pak je obraz $f(I)$ též interval (tedy funkce má Darbouxovu vlastnost, tj. nabývá mezihodnot).

Metody pro výpočet primitivní funkce:

- tabulkové integrály
- per partes
- substituce ... zde jen 1. typu
- rozklad na parc. zlomky (zde jen pro rac. lomené funkce s $\mathbb{R}$ kořeny)

1. ‘Lepení’ primitivních funkcí – určete primitivní funkce na největším možném intervalu:

(a) $\int |x| dx$ (b) $\int |\cos x| dx$

2. Určete primitivní funkce: metoda per partes:

(a) $\int x \sin x dx$ (b) $\int (x^2 - x) \exp(x) dx$ (c) $\int \exp(x)(\sin x + \cos x) dx$
(d) $\int \ln |1 + x| dx$ (e)* $\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x dx$ (f)* $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

3. Určete primitivní funkce: metoda substituce

(a) $\int 2x \cdot \exp(-x^2) dx$ (b) $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$ (c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$
(d) $\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}} dx$ (e) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$
(g) $\int \operatorname{tg} x dx$ (h) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ (i) $\int \exp(\sqrt{x}) dx$

4. Určete primitivní funkce: doplnění na čtverec a rozklad na parciální zlomky

(a) $\int \frac{x^2+2x}{x+3} dx$ (b)* $\int \frac{3x+4}{x^2+3x+5} dx$ (c) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$
(d)* $\int \frac{1}{(3x^2-2x-1)} dx$ (e) $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx$ (f) $\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}} dx$