

1. Cvičení z MA I. (14. 2. 2023)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Výroková logika

1. Který z následujících výroků je ‘silnější’, tj. implikuje druhý z výroků?

- (a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že platí $|f(x+1) - f(x)| \leq K$
- (b) $\exists K \in \mathbb{R}, K > 0$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

2. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

- (a) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N}$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$
- (b) $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N}$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$
- (c) $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{R}$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

3. Jak probíhá důkaz? Jak byste jednotlivé typy důkazů popsali pomocí logických výroků?

- (a) Co je přímý důkaz? Ukažte, že pro těleso s lineárním uspořádáním platí: $(a > 1) \rightarrow (a^2 > 1)$.
- (b) Co je nepřímý důkaz? Ukažte, že platí: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a \cdot b = 0) \rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$
- (c) A co je důkaz sporem? Ukažte, že $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

B. Zobrazení a funkce

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti funkce: omezenost, maximum/minimum; funkce prostá a funkce ‘na’.

4. Najděte příklady funkcí f_1, f_2, f_3 z \mathbb{N} do \mathbb{N} s následujícími vlastnostmi:

- (a) f_1 je ‘na’, ale není prostá
- (b) f_2 je prostá, ale není ‘na’
- (c) f_3 je ‘na’ a každé přirozené číslo má nekonečně mnoho vzorů.

5. Mějme zobrazení $f : X \rightarrow Y$ a množiny $A, B \subset X$. Jaké musí mít f, A, B vlastnosti, aby platily následující vztahy?

- (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- (c) Jaký je obecný vztah mezi množinami A a $f^{-1}(f(A))$?

6. Najděte funkci, která zobrazuje:

- (a) interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$
- (b) interval $[0, 1]$ na interval $(0, 1)$
- (c) interval $(0, 1)$ na interval $(0, \infty)$
- (d) interval $(0, 1)$ na interval $(-\infty, \infty)$
- (e) interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$
- (f) interval $(0, \infty)$ na interval $(0, 1)$

7. Vyhovuje funkce $f(x) = \sin x$ ($f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$) následujícímu výroku, nebo jeho negaci?

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R}, K > 0 \forall x \in \mathbb{R} : x > K \rightarrow |f(x)| < \epsilon$$

C. Přirozená, racionální a reálná čísla

Co to je „mohutnost“ konečné množiny a nekonečné množiny? Jak se definuje spočetnost?

8. Dokažte, že následující množiny jsou spočetné:

- (a) množina celých čísel \mathbb{Z}
- (b) množina dvojic přirozených čísel, tedy \mathbb{N}^2
- (c) racionálních čísel \mathbb{Q} .

9. Nechtě A je neprázdná množina reálných čísel ($A \subseteq \mathbb{R}$, navíc $A \neq \emptyset$). Víte, že neexistuje minimum A .

- (a) Zapište formálně pomocí matematických symbolů výrok T „ A má minimum“ a pak ho znegujte.
- (b) Dokažte, že A je nekonečně velká (aspoň spočetně velká).