

4. Cvičení z MA II. (21. a 22. 10. 2021)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Parciální derivace

Nechť $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, G je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ je i -tý vektor kanonické báze \mathbb{R}^n . *Parciální derivací fce f podle i -té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení: $C^1(G)$... množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojitě parc. derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojitě jako fce n proměnných).

1. (= cvičení 6 z minula) Určete definiční obor následujících funkcí na \mathbb{R}^n , vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují. Případně vyčíslete v zadaném bodě.

(a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ v bodě $[1, -2]$

(b) $f(x, y, z) = (\frac{x}{y})^z$ v bodě $[e, 1, 2]$. Vypočtěte též parciální derivace 2. řádu!

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$

(d)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

2. Proč nestačí existence parciálních derivací pro spojitost?

Jak je to s požadavkem spojitosti parc. derivací v okolí daného bodu jako předpokladem pro spojitost funkce v daném bodu (a jak se má k totálnímu diferenciálu)?

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x = 0 \text{ nebo } y = 0 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Co to je **směrová derivace**?

Nechť $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, G je otevřená, $a \in G$ a v je vektor v $\mathbb{R}^n \setminus \{0, (\dots, 0)\}$. *Směrovou derivací fce f v bodě a ve směru v -té proměnné* rozumíme číslo

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \quad \text{značí se též } f'_v(a)$$

(pokud tato limita existuje).

Jak souvisí směrová derivace s parciálními derivacemi?

3. Vypočtete derivace následujících funkcí f v zadaných směrech v v zadaných bodech a .

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $v = (-1, 1, 1)$ v bodě $a = (1, 2, -1)$

(b) $f(x, y) = e^{x-y^2}$ ve směrech $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$ v bodě $(0, 0)$

Na příště: Budeme procvičovat řetízkové pravidlo a totální diferenciál – prosím, zopakujte si, o co jde, z přednášky (případně si připravte tahák)!

Pro zajímavost, pokud budeme mít čas: Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací:

$$f(x, y) = xy \text{ pro } |x| \geq |y| \text{ a } f(x, y) = 0 \text{ pro } |x| < |y|$$

Řešení:

1a. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{y \cdot \text{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \text{ pro } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x \cdot \text{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \text{ pro } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \text{ neex. pro } y \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0 \text{ pro } y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0 \text{ pro } x \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \text{ neex. pro } x \neq 0$$

1b. $D_f = \{[x, y, z] \in R^3; x > 0, y > 0\} \cup \{[x, y, z] \in R^3; x < 0, y < 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \frac{z}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \left(-\frac{z}{y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \ln \frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \frac{z}{x^2}(z - 1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \frac{z}{y^2}(z + 1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot (\ln \frac{x}{y})^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = -\left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \frac{z^2}{xy},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = -\left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \frac{1}{y}(z \ln \frac{x}{y} + 1),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \frac{1}{x}(z \ln \frac{x}{y} + 1)$$

1c. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{8y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ neex.}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ neex.}$$

1d. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$