2. Cvičení z MA II. (7. a 8. 10. 2021)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Metrické prostory

Co je to metrický prostor? Jaké má vlastnosti metrika? K čemu jsou metriky?
Co je to okolí, otevřená a uzavřená množina? A koule o poloměru r?

1. Následující předpisy definují metrické prostory (M, d) :

(a) absolutní hodnota: $M = \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|$

$M = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$:

(b) eukleidovská metrika: $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$
(založeno na Cauchy-Buňakovského nerovnosti: $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$)
Zobecnění: $d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p} \quad (p \geq 1),\ p \in \mathbb{R}$

(c) manhattanská/součtová metrika: $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

(d) maximová metrika: $d_{max}(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; 1 \leq i \leq n\}$

(e) pařížská metrika $(n = 2)$:
$d_{par}(x, y) = d_2(x, y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^2$ ležící na stejné polopřímce od bodu $(0, 0)$,
jinak $d_{par}(x, y) = \|x\| + \|y\|$ (kde $\|.\|$ je eukleidovská norma)

(f) diskrétní metrika: $M \neq 0,\ d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$, $d(x, y) = 0$ pro $x = y$

(g) prostor omezených funkcí na intervalu $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ se supremovou metrikou:
$M = F(a, b), \quad d_{sup}(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|,\ \text{kde } x \in [a, b]\}$

(h) vzdálenost na neorientovaném souvislém grafu $G = (V, E)$:
$M = V, \quad d(u, v)$ je počet hran na nejkratší cestě mezi u, v.

(i) editační vzdálenost:
Mějme konečnou abecedu znaků (např. $\Sigma = \{a, b, c\}$), pak slova jsou konečné řetězce znaků (kde prázdné slovo je též slovo, značíme λ). Řekneme, že dvě slova se liší jednou změnou, pokud jedno slovo získáme z druhého:
- vynecháním jednoho znaku (kdekoli ve slově);
- přidáním jednoho znaku (kdekoli ve slově);
- záměnou jednoho znaku za jiný (na dané pozici ve slově).
Vzdáleností (=metrikou) dvou slov je pak nejmenší počet změn, kterým se z jednoho slova získá slovo druhé.

2. Jak vypadá jednotková koule, tedy množina $B(a, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < 1\}$, v prostoru $\mathbb{R}^n$
- s eukleidovskou metrikou,
- s manhattanskou/součtovou metrikou,
- s maximovou metrikou a
- s pařížskou metrikou (viz cvičení 1)?

3. Ukažte, že eukleidovská, manhattanská a maximová metrika (viz cvičení 1) jsou silně ekvivalentní.

Řekneme, že dvě metriky d_i, d_j na stejné množině M jsou silně ekvivalentní, pokud $\exists r, s \in (0, \infty)$ taková, že pro $\forall x, y \in M$ platí: $\quad r \cdot d_i(x,y) \leq d_j(x,y) \leq s \cdot d_i(x,y)$

4. Platí následující tvrzení? Dovedete zdůvodnit?

(a) Množina $B(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\}$ (pro $r > 0$) je otevřená množina metrického prostoru (M,d).

(b) Množina $B'(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) \leq r\}$ (pro $r > 0$) je uzavřená množina metrického prostoru (M,d).

(c) Jednobodové množiny jsou uzavřené množiny metrického prostoru (M,d).

(d) Jak vypadají otevřené množiny v metrickém prostoru (M,d), jehož každý bod je izolovaným bodem? (Bod a je izolovaným bodem množiny $A \subseteq M$, pokud $\exists r > 0$ takové, že $B(a,r) \cap A = \{a\}$.)