4. cvičení z MA II. (21. 10. 2020)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Pro zahřátí: Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x = 0 \ \vee \ y = 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0 \end{cases}$$

(a) Vyšetřete její spojitost.
(b) Spočítejte parciální derivace v bodech mimo přímky $x = 0$ a $y = 0$, v bodech ležících na těchto přímkách mimo bod $(0,0)$ a v bodě $(0,0)$.
(c) Spočítejte směrové derivace ve směru $(1,1)$ v bodech mimo přímky $x = 0$ a $y = 0$ a v bodě $(0,0)$.

Totální diferenciál.
Řekneme, že funkce funkce $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in G$ **(totální) diferenciál**, existuje-li funkce μ spojitá v okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $o = (0, ...0)$ taková, že $\mu(o) = 0$, a čísla $A_1, \dots A_n$ pro která platí

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} A_k h_k + \|h\| \mu(h).$$

Čísla A_k $(k = 1, ..n)$ nám dávají lineární funkci L, která v bodě a „dobře“ aproximuje funkci f (této funkci se též někdy říká totální diferenciál a značívá se D_f, příp. $D_f(a)$, D_f^a či $\mathrm{d}f(a)$).
Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi? odpověď: $A_k = \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$
Jak souvisí totální diferenciál s gradientem? odpověď: $D_f^a(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_k} h_k = \langle \nabla f(a), h \rangle$

1. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1 + h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1,1)$.

2. Mějme funkci $f(x,y) = \sqrt{|x||y|}$. odpověď: ZAMĚNIT za jiný příklad, bylo minule!!
(a) Vyšetřete spojitost v bodě $(0,0)$.
(b) V bodě $(0,0)$ spočítejte parciální derivace.
(b) Má funkce v bodě $(0,0)$ totální diferenciál? Pokud ano, spočtěte ho.

3. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1+xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

4. Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí f. Jak lze funkci f pomocí tot. diferenciálu odhadnout v okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$, resp. $a \in \mathbb{R}^3$?

(a) $f(x,y) = e^{xy}$ (b) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

5. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ v bodě $a = (1,2,-1)$; jaká bude jeho hodnota ve směru $h = (-1,1,1)$?

6. Ukažte, že pro malá x a y platí:

(a) $(1+x)^m(1+y)^n \approx 1 + mx + ny$

(b) $\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy$

Domácí úkol na 29. 10. 2020 (4. série, příklady po 1 bodu)

1. Buď dána funkce

$$f(x,y) = \arccos \frac{x}{x+y}$$

a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
b) Určete gradient funkce $\nabla f(x,y)$ v bodě $[1,1]$.
c) Je funkce f v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
d) Aproximujte f pomocí diferenciálu v bodě [1,04; 0,99].

2. Zjistěte, zda lze funkci $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ dodefinovat tak, aby měla ve všech bodech R^2 totální diferenciál. Všude, kde existuje, totální diferenciál určete!