13. cvičení z MA II. (7. 1. 2021)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Opakování – co by bylo v písemce (kdyby byla).

1. Metrické prostory, otevřené a uzavřené množiny.
Definujme metrický prostor (X, d), kde $X = C([0, 2])$, tedy všechny spojité reálné funkce na uzavřeném intervalu $[0, 2]$. Postupně definujeme metriku d:

(a) Definujeme skalární součin (ukažte, že jde skutečně o skalární součin!):

$$\langle f|g\rangle = \int_0^2 f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$$

(b) Skalární součin dává normu (věta z lineární algebry):

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle} \qquad \left(= \sqrt{\int_0^2 f^2(x)\ \mathrm{d}x}\right)$$

(c) Norma dává metriku (viz algebra):

$$d(f, g) = \|f - g\| \qquad \left(= \sqrt{\int_0^2 (f-g)^2(x)\ \mathrm{d}x}\right)$$

(d) Definujme následující funkce $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Uvědomme si, že $f_n \in X$ (tedy jsou spojité):

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [0, 1 - 1/n) \cup (1 + \frac{1}{n}, 2] \\ nx + 1 - n & \text{pro} \quad x \in [1 - 1/n, 1) \\ -nx + 1 + n & \text{pro} \quad x \in [1, 1 + 1/n] \end{cases}$$

(e) Jak vypadá funkce $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$? Patří do X?

(f) Definujme funkce $g_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$ následujícím způsobem:

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [0, 1 - 1/n) \cup (1 + \frac{1}{n}, 2] \\ n^2x + n - n^2 & \text{pro} \quad x \in [1 - 1/n, 1) \\ -n^2x + n + n^2 & \text{pro} \quad x \in [1, 1 + 1/n] \end{cases}$$

– Ukažte, že $g_n \in X$ (tedy že jsou spojité).
– Ukažte, že následující $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ není funkce z X.

– Spočítejte $\int_0^2 g_n(x)\ \mathrm{d}x$.

2. Funkce více proměnných – spojitost, parciální derivace.
Mějme následující funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & \text{pro} \quad [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro} \quad [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

(a) Definiční obor této funkce – je to otevřená, případně uzavřená množina (proč)?
(b) Rozhodněte, zda je f spojitá na $\mathbb{R}^2$.
(c) Spočítejte parciální derivace f na celém definičním oboru (pokud v nějakém bodě neexistují, vyšetřete, zda v tomto bodě existují jednostranné parciální derivace).

3. Totální diferenciál, tečná nadrovina – jak jsou definovány a "k čemu to je"?
Mějme funkci $f(x,y) = 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{y}{x+1}}$
(a) Najděte definiční obor funkce f a načrtněte jej.
(b) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě $[0,-3]$ a určete v tomto bodě její totální diferenciál.
(c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $[0,-3,8]$.
(d) Najděte lineární aproximaci funkce f v okolí bodu $[0,-3]$.

4. Věta o implicitních funkcích – jak zní a "k čemu to je"?
Ukažte, že zadanou množinu M lze na okolí daného bodu a popsat jako graf funkce f. Spočtěte v příslušném bodu její derivace. $M = \{(x,y) \in R^2;\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0\}$ v okolí b. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

5. Extrémy funkcí více proměnných – extrémy na otevřené množině a vázané extrémy.
Určete globální extrémy zadané funkce f na množině M:

$$f(x,y,z) = xy + z^2$$

$$M = \{[x,y,z] \in R^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ \ \& \ \ 0 \leq x\}$$

Postupy pečlivě zdůvodněte!!