1. Cvičení z MA II. (1. 10. 2020)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Úvodní informace – viz web.

Na rozehřátí – motivační příklad z přednášky:
Nechť $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \qquad\quad\;\; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Jak je to s její spojitostí mimo bod $(0,0)$? A v bodě $(0,0)$?

Metrické prostory

Co je to metrický prostor? Jaké má vlastnosti metrika? K čemu jsou metriky?
Co je skalární součin a norma (a norma indukovaná skalárním součinem, metrika indukovaná normou)?
Co je to okolí, otevřená a uzavřená množina? A koule o poloměru r?

1. Následující předpisy definují metrické prostory (M, ρ) :

(a) absolutní hodnota: $\quad M = \mathbb{R}, \quad \rho(x,y) = |x-y|$

$M = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$:

(b) eukleidovská metrika: $\quad \rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$
(založeno na Cauchy-Buňakovského nerovnosti: $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$)
Zobecnění: $\rho_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p} \quad (p \geq 1),\ p \in \mathbb{R}$

(c) manhattanská metrika: $\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

(d) maximová metrika: $\quad \rho_{max}(x,y) = \max\{|x_i - y_i|; 1 \leq i \leq n\}$

(e) pařížská metrika $(n = 2)$:
$\rho_{par}(x,y) = \rho_2(x,y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^2$ ležící na stejné polopřímce od bodu $(0,0)$,
jinak $\rho_{par}(x,y) = \|x\| + \|y\|$ (kde $\|.\|$ je eukleidovská norma)

(f) diskrétní metrika: $\quad M \neq 0,\ \rho(x,y) = 1$ pro $x \neq y,\ \ \rho(x,y) = 0$ pro $x = y$

(g) prostor omezených funkcí na intervalu $[a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ se supremovou metrikou:
$M = F(a,b), \quad \rho_{sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|,\ \text{kde } x \in [a,b]\}$

(h) vzdálenost na neorientovaném souvislém grafu $G = (V, E)$:
$M = V, \quad \rho(u,v)$ je počet hran na nejkratší cestě mezi u, v.

(i) editační vzdálenost:

Mějme konečnou abecedu znaků (např. $\Sigma = \{a, b, c\}$), pak slova jsou konečné řetězce znaků (kde prázdné slovo je též slovo, značíme λ). Řekneme, že dvě slova se liší jednou změnou, pokud jedno slovo získáme z druhého:
- vynecháním jednoho znaku (kdekoli ve slově);
- přidáním jednoho znaku (kdekoli ve slově);
- záměnou jednoho znaku za jiný (na dané pozici ve slově).

Vzdáleností (=metrikou) dvou slov je pak nejmenší počet změn, kterým se z jednoho slova získá slovo druhé.

2. Jak vypadá jednotková koule (tedy množina $B(a, r) = \{x \in M; \rho(a, x) < r\}$, kde $r = 1$) v prostoru $\mathbb{R}^n$

ML: UPRAVT $B(a, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n; \rho(a, x) < 1\}$).

- s eukleidovskou metrikou;
- s manhattanskou metrikou a
- s maximovou metrikou (viz cvičení 1)?

3. Ukažte, že eukleidovská, manhattanská a maximová metrika (viz cvičení 1) jsou silně ekvivalentní.

Řekneme, že dvě metriky ρ_i, ρ_j na stejné množině M jsou silně ekvivalentní, pokud $\exists r, s \in (0, \infty)$ taková, že pro $\forall x, y \in M$ platí: $r \cdot \rho_i(x, y) \leq \rho_j(x, y) \leq s \cdot \rho_i(x, y)$

4. = 1. sada domácích cvičení (po 1 bodu)... termín 8. 10. 2020 ve 12 hodin

Platí následující tvrzení? Dovedete zdůvodnit?

(a) Množina $B(a, r) = \{x \in M; \rho(a, x) < r\}$ ML: pro $r > 0$ je otevřená množina metrického prostoru (M, ρ). ML: Řešení: Zvolím lib. $\bar{x} \in B(a, r)$, pak $\rho(a, \bar{x}) = s < r$; pak mohu definovat $r_{\bar{x}} := \frac{r-s}{2} > 0$ a ukážu, že $B(\bar{x}, s) \subseteq B(a, r)$, tedy pro lib. $\bar{x}$ najdu jeho okolí, které se vejde do $B(a, r)$, tedy $B(a, r)$ je otevřená.

(b) Množina $\bar{B}(a, r) = \{x \in M; \rho(a, x) \leq r\}$ ML: pro $r > 0$ je uzavřená množina metrického prostoru (M, ρ). ML: !!!! přejmenovat, aby to nevypadalo, že $\bar{B}$ je uzávěr B –> např. $B'(a, r)$!!!!

ML: ?? DOKONCE možná platí $\bar{B}(a, r) = \overline{B(a, r)}$?? ML: Řešení:

(c) Jednobodové množiny jsou uzavřené množiny metrického prostoru (M, ρ).

(d) Jak vypadají otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ρ), jehož každý bod je izolovaným bodem?

ML: otevřenými množinami jsou asi všechny jednoprvkové (Bod a je izolovaným bodem množiny $A \subseteq M$, pokud $\exists r > 0$ takové, že $B(a, r) \cap A = \{a\}$.)

ML: další příklady (jako tvrzení bylo na přednášce)... řešení - jednoduše z definice ot. mn. (Král):
- $M, \emptyset$ otevřené i uzavřené v M
- sjednocení lib. souboru ot. množin je otevřené
- průnik kon. mnoha ot. množin je otevřený
- obdobně paralela pro uzavřené množiny (kon. sjednocení, libovolný průnik)