8. cvičení z MA II. (19. 11. 2020)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Extrémy funkcí více proměnných.
Kde budeme hledat body „podezřelé" z extrému?

1. Najděte všechny lokální i globální extrémy následující funkce f (na celém definičním oboru):

$$f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$$

2. Vyšetřete lokální a globální extrémy následujících funkcí f na zadaných množinách M:

(a) $f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$
(minule jsme nespočítali)

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}$

Metoda Lagrangeových multiplikátorů.
Mějme reálné funkce $f, g_1, ...g_k : U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina). Nechť tyto funkce mají na U spojité parc. derivace. Předpokládejme dále, že vektory $\nabla g_1, ...\nabla g_k$ jsou lineárně nezávislé. Potom platí:
Nabývá-li li funkce f v bodě $a = (a_1, ...a_n)$ lokálního extrému vázaného podmínkami

$$g_1(x) = ... = g_k(x) = 0,$$

pak existují čísla $\lambda_1, ...\lambda_k$ taková, že pro všechna $i = 1, ...n$ platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) = 0$$

(JINAK: Lagrangeova funkce $L = f + \langle \lambda, g \rangle$ má v a stacionární bod, tedy její parc. derivace jsou tam nulové.)

3. Zjistěte lokální extrémy funkcí na zadaných množinách – využijte Lagrangeovy multiplikátory.

(a) $f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 = 0\}$.

(b) $f(x,y) = y$ na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$

Domácí úkol na 26. 11. 2020 (8. série) – 2 příklady (celkem 3 body):
1. (1 bod) Zjistěte pomocí Lagrangeových multiplikátorů lokální extrémy funkce $f(x,y) = x+y$ na množině $M = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$
2. (2 body) Zjistěte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$ na množině $M = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$ – využijte libovolných metod, ale detailně zdůvodněte.