3. Cvičení z MA II. (15. 10. 2020)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Parciální derivace (přesun z minulého cvičení)

Parciální derivace. Nechť $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, G je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0]$ je i-tý vektor kanoniclé báze $\mathbb{R}^n$. *Parciální derivací fce f podle i-té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení: $C^1(G)$ … množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc. derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako fce n proměnných).

1. (= cvičení 6 z minula) Určete definiční obor následujících funkcí na R^n, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslete.

(a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ v bodě $[1, -2]$

(b) $f(x, y, z) = (\frac{x}{y})^z$ v bodě $[e, 1, 2]$. Vypočtěte též parciální derivace 2. řádu!

2. Určete definiční obor následujících funkcí na R^n, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$

(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ pro $[x, y] \neq 0$, $f(0, 0) = 0$

Co to je **směrová derivace**?
Nechť $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, G je otevřená, $a \in G$ a v je vektor v $\mathbb{R}^n \setminus \{0, (\dots, 0)\}$. *Směrovou derivací fce f v bodě a ve směru v-té proměnné* rozumíme číslo

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \quad \text{značí se též } f'_v(a)$$

(pokud tato limita existuje).

Jak souvisí směrová derivace s parciálními derivacemi?

3. Vypočtěte derivace následujících funkcí f v zadaných směrech v v zadaných bodech a.

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $v = (-1, 1, 1)$ v bodě $a = (1, 2, -1)$

(b) $f(x, y) = e^{x-y^2}$ ve směrech $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$ v bodě $(0, 0)$

K procvičování: Lze se podívat na cvičení vedené dr. Králem.

Na příště: Budeme procvičovat řetízkové pravidlo a totální diferenciál – prosím, zopakujte si, o co jde, z přednášky (případně si připravte tahák)!

Pro zajímavost, pokud budeme mít čas: Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací:

$f(x, y) = xy$ pro $|x| \geq |y|$ a $f(x, y) = 0$ pro $|x| < |y|$

Domácí úkol – 3. sada (příklady po 1 bodu)... **termín 22. 10. 2020 ve 12 hodin**

1. Určete definiční obor následující funkce a vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu všude, kde existují:

   $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$, vyčíslete v bodě $[1, 1]$

2. Najdete definiční obor, zjistěte, zda je funkce omezená shora, zda je omezená zdola, a spočítejte všechny derivace prvního a druhého řádu:

   $f(x, y) = \ln(x^2 - 2x - y)$

3. Vypočtěte derivaci funkce: $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ ve směru $(2, 1, 1)$ v bodě $(1, 1, 0)$.

Řešení:

1a. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{y\cdot\mathrm{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x\cdot\mathrm{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}\cdot$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neex. pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ pro $y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ pro $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neex. pro $x \neq 0$

2a. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{8y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neex., $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neex.

2b. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$