12. cvičení z MA II. (17. 12. 2020)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Riemannův integrál ve více proměnných.
Jak je definovaný vícerozměrný integrál? Kdy existuje?
A jak lze spočítat vícerozměrný integrál pomocí integrálu jedné proměnné?

1. Spočítejte z definice:

$$\int_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}xy, \qquad \text{kde } f(x,y)=c$$

2. Spočítejte následující integrály (proměnné značíme po řadě x a y) – postup zdůvodněte !

(i) $\int_{\langle -1,3\rangle\times\langle 0,2\rangle}(x+y^2)\,\mathrm{d}xy$ (ii) $\int_{\langle 0,\pi\rangle\times\langle 0,1\rangle} x\sin(xy)\,\mathrm{d}xy$

3. Pozor na pořadí – spočítejte následující integrál (proměnné opět po řadě x a y):

$\int_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle}(x^y)\,\mathrm{d}xy$ (pro $y>0$ klademe $0^y=0$)

4. Mějme funkci $f(x,y,z)=z\sin(x+y)$ a množinu $J=J_1\times J_2\times J_3$ danou nerovnostmi $0\le x\le\pi$, $|y|\le\frac{\pi}{2}$ a $0\le z\le 1$. Spočítejte následující integrál:

$$\int_J f(x,y,z)\,\mathrm{d}xyz=\int_J z\sin(x+y)\,\mathrm{d}xyz.$$

5. Mějme množinu $D\subseteq\mathbb{R}^2$, která je ohraničena přímkami $x=0$, $x=2\pi$, $y=0$ a grafem funkce $y=2+\sin(x)$. Vypočítejte Riemannův integrál I.

$$I=\int_D \frac{y}{3}\,\mathrm{d}xy$$

(Nakreslete D a rozmyslete si, zda vůbec integrál I existuje – jak budeme postupovat, když umíme integrovat jen na "cihlách"?)

6. Mějme uzavřenou oblast $D\subseteq J_1\times J_2\subseteq\mathbb{R}^2$, $D=\{(x,y)\mid y\ge x-1\ \&\ y^2/2-6\le x\}$. Vypočítejte Riemannův integrál I.

$$I=\int_D xy\,\mathrm{d}xy$$

(Nakreslete D a rozmyslete si, zda vůbec integrál I existuje – jak budeme postupovat, když umíme integrovat jen na "cihlách"?)