7. cvičení z MA II. (12. 11. 2020)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Věta o implicitních funkcích. Nechť $F = (F_1, ...F_n) : W \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení definované na okolí $W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ bodu (x_0, y_0).
odpověď: Zajímá nás (v okolí bodu (x_0, y_0)) řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, ...x_m, y_1, ...y_n) &= 0 \\ &\dots \\ F_n(x_1, ...x_m, y_1, ...y_n) &= 0 \end{aligned}$$

Nechť pro tato $F = (F_1, ...F_n)$ a pro daný bod platí:
(i) $F_i(x_0, y_0) = 0$ pro $1 \leq i \leq n$
(ii) F_i mají spojité parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0) pro $1 \leq i \leq n$
(iii) $\det(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)) \neq 0$.
Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^m$ bodu x_0 a okolí $V \subset \mathbb{R}^n$ bodu y_0 takové, že pro každý bod $x \in U$ existuje právě jeden bod $y \in V (y = y(x))$ splňující $F_i(x, y) = 0$ pro $1 \leq i \leq n$.
Pak též umíme spočítat všechny derivace f v bodě x_0 (a tedy Taylorovy polynomy).

1. Mějme funkci $F(x, y)$ definovanou níže a bod $(x_0, y_0) = (6, 2)$.
Dokažte, že v nějakém okolí $U \times V$ tohoto bodu (x_0, y_0) existuje funkce $f = f(x)$, pro kterou platí $f(x_0) = y_0$ a navíc $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$.

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4$

Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

2. Mějme dvě funkce f, g, kde $x = f(z),\ y = g(z)$. Určete, zda je možné tyto funkce definovat následujícími podmínkami:

$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$
$x + y + z = 2$
$f(2) = 1,\ g(2) = -1$

Pokud to lze, určete $f'(2),\ g'(2)$ a $f''(2),\ g''(2)$.

3. Ukažte, že zadanou množinu M lze na okolí bodu $a = (1, 0)$ popsat jako graf funkce $f = f(x)$, kde $f(1) = 0$.

$$M = \{(x, y) \in R^2;\ \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \tfrac{y}{x}\}$$

Spočtěte její parciální derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

Extrémy funkcí více proměnných.
Kde budeme hledat body „podezřelé" z extrému?

4. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí na definičním oboru (případně dodefinujte, kde lze spojitě dodefinovat):

(a) $f(x, y) = x(3 - x^2) - y^2$

(b) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$

5. Vyšetřete extrémy následují funkce f na zadané množině M:

$$f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2 \quad \text{na} \quad M = \{[x,y] \in R^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$$

Domácí úkol na 19. 12. 2020 (7. série) – 3 příklady, celkem 3 body:

1. (1 bod) Mějme množinu $M = \{(x,y,z) \in R^3;\ x\sin z + y\cos z - e^z = 0\}$.
(a) Ukažte, že tuto množinu lze na okolí bodu $a = (2,1,0)$ popsat jako graf funkce $z = z(x,y)$, kde $z(2,1) = 0$.
(b) Spočtěte (parc.) derivace prvního řádu této funkce z v příslušném bodu a.
(c) Napište rovnici tečné roviny (pokud existuje) ke grafu funkce z v b. $(2,1,0)$.

2. (1 bod) Najděte všechny odpověď: globální a lokální extrémy následující funkce na jejím definičním oboru:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}$$

3. (1 bod) Vyšetřete extrémy následují funkce f na zadané množině M:

$$f = xy^2 \text{ na } M = \{(x,y) \in R^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$$

Pro zájemce o další procvičení (nejde o dom. úkol)
Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí na definičním oboru (případně dodefinujte, kde lze spojitě dodefinovat):

(a) $f(x,y,z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$

(b) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

(c) $f(x,y) = 27xy^2 + 14x^3 - 69x - 54y$

Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y) = x + 2y + \tfrac{3}{4}x^2 + xy + 2y^2 \quad \text{na} \quad M = \{[x,y]; y^2 - 2 \le x \le -y^2 + 2\}$$