5. cvičení z MA II. (29. 10. 2020)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

1. Pro zahřátí:
Mějme funkce

$x = r\cos(s)(= x(r,s))$,
$y = r\sin(s)(=$ y(r,s)) a
$f(x,y) = xe^{x+y}$.

Složením dostaneme funkci $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$H(r,s) = f(x(r,s), y(r,s)) = r\cos(s)e^{(r\cos(s))+(r\sin(s))}$.

Spočítejte „postaru“ její parciální derivace.

Opakování.
Totální diferenciál v bodě a je lineární funkce, která v okolí bodu a „dobře“ aproximuje funkci f; tato funkce se též značí, D_f, příp. $D_f(a)$, D_f^a či $\mathrm{d}f(a)$.

– Proč nám nestačí existence parc. derivací v bodě – a co je „lepší“ podmínka?

– Jaká tvrzení a věty platí pro tot. diferenciál, parciální a směrové derivace a jejich vztahy?

– Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?

Za jakých podmínek platí: $A_k = \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$ (kde A_k jsou hodnoty z definice tot. diferenciálu)

– Jak souvisí totální diferenciál s gradientem?

Za jakých podmínek platí: $D_f^a(h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_k} h_k = \langle \nabla f(a), h\rangle$

– A jak souvisí totální diferenciál se směrovou derivací?

Za jakých podmínek platí: $D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle$

2. Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí f.
Jak lze funkci f pomocí tot. diferenciálu odhadnout v okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$, resp. $a \in \mathbb{R}^3$?

(a) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ (b) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

3. Určete směrové derivace funkce $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$ v bodě $(0,0,0)$ a směru $h = (h_1, h_2, h_3)$. Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje diferenciál.

Řetízkové pravidlo.
Mějme funkci $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou jako složení funkcí $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tedy:

$$H(r,s) = f(g_1(r,s), g_(r,s)) \ .$$

Zkusme zjistit, jakým způsobem dostaneme řetízkové pravidlo (neformálně, formální důkaz najdete ve skriptech).

I. pro funkce jedná proměnné víme: $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$

II. pro funkce dvou proměnných víme: $f(x+h,y) \approx f(x,y) + h\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$

4. Mějme funkce $f, g_1, g_2, H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (jako výše), kde:
$f(x,y) = xe^{x+y}$

$g_1(r,s) = r\cos(s)$
$g_2(r,s) = r\sin(s)$
$H(r,s) = f(g_1(r,s), g_(r,s))$

(a) Pomocí řetízkového pravidla spočítejte parciální derivace funkce H.
(b) Spočítejte totální diferenciál funkce H.
(c) Aproximujte pro malá ϵ hodnotu $H(1+\epsilon, \epsilon)$ (pomocí totálního diferenciálu).

Pro zajímavost, pokud budeme mít čas: Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací! (Viz též cvičení 3. ... zajímavý je bod $(0,0)$)

$$f(x,y) = xy \text{ pro } |x| \geq |y| \quad \text{a} \quad f(x,y) = 0 \text{ pro } |x| < |y|$$

Domácí úkol na 5. 11. 2020 (5. série – celkem 2 body)

1a. (0,5 bodu) Derivujte podle všech proměnných podle řetízkového pravidla složenou funkci $t \to z$, kde $z = \arcsin(x-y),\ x = 3t,\ y = 4t^3$

1b. (0,5 bodu) Nechť funkce $(u,v,w) \to f(u,v,w)$ má spoj. parciální derivace na R^3. Spočítejte parciální derivace funkce $p(x,y,z) = f(x, xy, xyz)$.

2. (1 bod) Buď dána funkce

$$f : (x,y) = \sqrt{\frac{1}{|1-x^2-y^2|}}$$

a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej. Pokud to lze, najděte fci F, která je spojitým rozšířením fce f na R^2.
b) Vypočítejte gradient $\nabla f(x,y)$ v bodě $[1,1]$. Zjistěte, v jakých bodech má fce f totální diferenciál. Pokud má fce f tot. diferenciál v b. $[1,1]$, spočtěte ho.
c) Aproximujte hodnotu funkce f v bodě $[1,02; 0,99]$ pomocí totálního diferenciálu $D_{f(1,1)}$.
d) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[0,0,?]$.