6. cvičení z MA II. (5. 11. 2020)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Řetízkové pravidlo (ještě návrat k minulému cvičení)
Mějme funkci $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou jako složení funkcí $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tedy:

$$H(r, s) = f(g_1(r, s), g_2(r, s)) \ .$$

1. (minule jako cv. 4) Mějme funkce $f,\ g_1,\ g_2,\ H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (jako výše), kde:

$f(x, y) = xe^{x+y}$
$g_1(r, s) = r\cos(s)$
$g_2(r, s) = r\sin(s)$
$H(r, s) = f(g_1(r, s), g_(r, s))$

(a) Pomocí řetízkového pravidla spočítejte parciální derivace funkce H.
(b) Spočítejte totální diferenciál funkce H.
(c) Aproximujte pro malá ϵ hodnotu $H(1 + \epsilon, \epsilon)$ (pomocí totálního diferenciálu).

2. Mějme funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$f(x, y) = x + xy + y/x$
$g(r, s) = (\sin(rs), r - s)^T$

Spočítejte všechny parciální derivace složené funkce $H = f \circ g$. Užijte maticové značení z přednášky! Jak toto souvisí s aproximací lineární funkcí?

Záměnnost druhých parciálních derivací.

3. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací!
Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{pro} \quad |x| \geq |y| \\ 0 & \text{pro} \quad |x| < |y| \end{cases}$$

(a) Spočítejte parciální derivace prvního a druhého řádu mimo body $|x| = |y|$.
(b) Spočítejte parciální derivace prvního a druhého řádu v bode $|x| = |y|$, kde $(x, y) \neq (0, 0)$.
(c) Spočítejte parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě $(0, 0)$.
Jaká podmínka zajistí, že parciální derivace druhého řádu jsou záměnné? Jejich existence evidentně nestačí!

Kompaktní metrické prostory.

– Definice kompaktního metrického prostoru.
– Uzavřená množina v metrickém prostoru.
– Úplný metrický prostor.
– Omezený metrický prostor.
– Kdy je podprostor eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ kompaktní?

4. Najděte metrický prostor (X, d) a množinu $A \subseteq X$, která je v něm uzavřená a omezená, ale není kompaktní? Tip: prostor racionálních čísel.

Domácí úkol na 12. 12. 2020 (6. série) – 2 příklady, celkem 3 body:

1. (2 body)
Mějme funkci $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a funkce $r,\ s,\ t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$f(u, v, w) = u + vw$

$r(x) = x^2$, $s(x) = x^3$ a $t(x) = \ln x$

(a) (1 bod) Spočítejte všechny parciální derivace složené funkce $f(r(x), s(x), t(x))$. Užijte maticové značení z přednášky!
(b) (1 bod) Zkontrolujte výpočtem derivací přímo („postaru”).

2. (1 bod) Nechť $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$.
Určete tečnu T, která je kolmá k přímce $\{[t, t, t] \in R^3; t \in R\}$. Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0, 0, t) \in R^3; t \in R\}$?

Tečná nadrovina. Nechť $G \subset R^n$ otevřená, $a \in G,\ f \in C^1(G)$. *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě* $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce $T,\ x \in R^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$