2. Cvičení z MA II. (8. 10. 2020)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. Ještě metrické prostory

Jak se definují otevřené a uzavřené prostory? Co jsou vzory a obrazy pro zobrazení mezi metrickými prostory?

1. Jaký je vztah mezi následujícími množinami – množinou $\overline{A \cap B}$ a množinou $\overline{A} \cap \overline{B}$?

2. Co je inverzní funkce? Jaký je vztah inverzní funkce a vzoru?
Nechť $f : X \to Y,\ A \subseteq X,\ B \subseteq Y$.

(a) Kdy platí $f^{-1}[f[A]] = A$?

(b) Kdy platí $f[f^{-1}[B]] = B$?

B. Spojitost reálných funkcí více proměnných

Jak se definuje spojité zobrazení? Jaká tvrzení o spojitých zobrazeních znáte? (skládání spoj. funkcí, charakteristika pomocí vzorů, charakteristika pomocí konv. posloupností)

3. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojité funkce $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (pro jednoduchost se omezme na polynomy dvou proměnných). ML:
podrobne reseni u Karla Krale, cviceni 3

4. Zkoumejte následující funkci $f :\ \mathbb{R}^n \to R$ (kde na $\mathbb{R}^n$ uvažujeme např. eukleidovskou metriku), $f(x, y) = \sqrt{\log(x - y)}$.
Určete definiční obor této funkce (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice.
Nabývá tato funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

5. Lze následující fce dodefinovat tak, aby byly na $\mathbb{R}^2$ spojité? Jak? Jsou tyto funkce omezené? Nabývají tam své největší a nejmenší hodnoty (pokud ano, jaké)?

(a) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

C. Parciální derivace

Parciální derivace. Nechť $f : G \subset R^n \to R,\ G$ je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0]$ je i-tý vektor kanoniclé báze R^n. *Parciální derivací fce f podle i-té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).
Značení: $C^1(G)$ … množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc. derivace podle

všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako fce n proměnných).

6. Určete definiční obor následujících funkcí na R^n, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslete.

(a) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ v bodě $[1,-2]$

(b) $f(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z$ v bodě $[e,1,2]$. Vypočtěte též parciální derivace 2. řádu!

Domácí úkol – 2. sada ... termín 15. 10. 2020 ve 12 hodin

Dú 1 (1 bod):
Ukažte, že je-li funkce f spojitá na $\mathbb{R}^n$, potom množina $M = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < 0\}$ je otevřená.

Dú 2 (po 1 bodu):
OPRAVA: Lze následující funkce dodefinovat tak, aby byly na $\mathbb{R}^2$ spojité?

(a) $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \frac{\sin x + \sin y}{x+y}$

(c) $f(x,y) = (x+y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Příklady k procvičování (na doma, pokud si nejste jistí) – nejde o domácí úkol: Určete definiční obor – jde o ot. či uz. množinu? Rozhodněte, zda jde o spojitou funkci, příp. zda ji lze spojitě rozšířit. Umíte vypočítat parciální derivace?

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2} - 1}$ (b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$

(d) $f(x,y) = \arcsin xy$ (e) $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x+1}$ (f) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$