10. cvičení z MA II. (3. 12. 2020)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Riemannův integrál.

Jak je definovaný Riemannův integrál? Kdy existuje?

1. Jaký je vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem?
(a) Kdy se dá 'zaměnit' a počítat Riemannův integrál jako Newtonův?
(b) Vzpomeňte si na funkci, která má Newtonův integrál a nikoliv Riemannův integrál.
(c) Vzpomeňte si na funkci, která má Riemannův integrál a nikoliv Newtonův integrál.

2. Odbočka: Co to je stejnoměrná spojitost a jak se liší od spojitosti 'obyčejné'?
Jsou následující funkce na daných intervalech spojité?

(i) $f(x) = x$ na $\mathbb{R}$ (ii) $f(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$ (iii) $f(x) = x^2$ na $\langle 1, 5\rangle$

3. Spočítejte následující integrály ((i)-(iii) z minula) - na co je potřeba dát pozor při substituci, při per partes?

(i) $\int \exp(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x$ (ii) $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ (iii) $\int_1^e \ln(x)\ \mathrm{d}x$

(iv) $\int_{e^{-1}}^{e} |\ln(x)|\ \mathrm{d}x$ (v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$ (vi) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})\ \mathrm{d}x$

4. Rozložte na parciální zlomky a pak integrujte:

(i) $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\ \mathrm{d}x$ (ii) $\int \frac{4}{(x+2)(2x+1)}\ \mathrm{d}x$ (iii) $\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}\ \mathrm{d}x$

Domácí úkol na 10. 12. 2020 (10. série) – 3 příklady (za celkem 3 body):

1. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2}$.

2. Spočítejte následující integrál: odpověď: POZOR, uz zde ... nevlastni integral (bod -1 vadi??)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x(\sqrt{x^2-1})}\,\mathrm{d}x$$

3. Pokud potřebujeme / chceme integrovat přes neomezený interval nebo funkce není v nějakém bodě integračního oboru omezená, zobecňujeme R. integrál a definujeme nevlastní integrál pomocí limity ... definici viz např. https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barta/FSV/mat3_zs09/M3_k8.pdf (str.3).
Spočítejte nevlastní R. integrál:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$