10. Cvičení z MA I. (14. 5. 2021)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. Taylorův polynom

Nechť f je funkce definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a $b \in I$. Nechť má dále f v b vlastní derivace až do řádu n ($n \in \mathbb{N}_0$). Potom definujeme *Taylorův polynom funkce f v bodě b řádu n* jako

$$T_n^{f,b}(x) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$$

Platí, že $T(x) = T_n^{f,b}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n, pro který platí:

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - T(x)}{(x-b)^n} = 0$$

(Je-li $n = 0$, potřebujeme předpokládat ještě spojitost f.)

Označme $R_n^{f,b}(x) := f(x) - T_n^{f,b}(x)$ ... výše uvedené znamená, že $R_n^{f,b}(x) = o((x-b)^n)$.

Víme, že má-li f na I vlastní derivaci řádu $n+1$, pak exisuje c (ostře) mezi b a x takové, že

$$R_n^{f,b}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-b)^{n+1}$$

---

1. Najděte Taylorův polynom (řádu např. 5 v bodě b) pro následující funkce (odhadněte velikost zbytku):

(a) $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, pro $b = 0$ (b) $f(x) = e^x$, pro $b = 0$ a $b = 1$

2. Spočtěte následující limitu pomocí Taylorova polynomu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

3. Spočtěte přibližně – dá Taylorův polynom 3. stupně odhad s přesností 0.0001?:

(a) $\sin(0.1)$ (b) $\ln(1.2)$

B. Primitivní funkce

Co jsou to primitivní funkce? Jaké má vlastnosti? Kdy má funkce primitivní funkci?

4. Určete primitivní funkce k následujícím funkcím (na největších možných intervalech):

(a) $\int x^3 + 2x + \frac{16}{x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int (3e^x + \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ (e) $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x$ (g) $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$

(h) $\int (\sqrt[3]{x} + x^2)\,\mathrm{d}x$ (i) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (j) $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$, kde $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

5. 'Lepení' primitivních funkcí – určete primitivní funkco na největším možném intervalu:

(a) $\int |x|\,\mathrm{d}x$ (b) $\int |\cos x|\,\mathrm{d}x$