

## 6. Cvičení z MA I. (16. 4. 2021)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

### Funkce – spojitost, limita

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá? Kdy je funkce rostoucí?

1. Dokažte, že je-li  $f$  (definovaná na  $\mathbb{R}$ ) neklesající na  $(-\infty, a)$  a nerostoucí na  $(a, +\infty)$  pro nějaké  $a \in \mathbb{R}$ , pak  $f$  nabývá maxima.

2. Necht  $f$  nabývá minima v  $a \in \mathbb{R}$ . Musí existovat  $\epsilon > 0$  takové, že  $f$  je nerostoucí na  $(a - \epsilon, a)$  a neklesající na  $(a, a + \epsilon)$ ?

3. Které z následujících operací provedených na neklesající funkce  $f, g$  dává opět neklesající funkci?

- (a)  $f + g$                       (b)  $f - g$                       (c)  $\max\{f, g\}$                       (d)  $\min\{f, g\}$                       (e)  $f \circ g$

4. Necht  $f$  a  $g$  jsou funkce definované na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  takto:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2 & \text{pro } x = 1. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocí definice zjistěte, zda mají tyto funkce limity v bodě 1 a případně jakou.

5. Sestrojte funkci  $f$  spojitou na  $(0, 1)$ , kterou ale nelze spojitě rozšířit na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

6. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ , pokud  $a = 0, 1, +\infty, -\infty$   
(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$                       (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$                       (d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$   
(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$                       (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$                       (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$   
(h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$                       (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$                       (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

NÁSTIN ŘEŠENÍ: ZDE JSME SKONCIL

**Důležité: zapamatujte si, že platí!** (dokážeme později):

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$     (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$     (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

7. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\sin x}$                       (b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$                       (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$   
(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^4}{\sin 2x}$                       (e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$                       (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$   
(g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\arctg\left(\frac{1}{2-x}\right)\right)^2$                       (h)\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^{2x-1}$                       (i)\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+7}\right)^x$