9. Cvičení z MA I. (7. 5. 2021)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

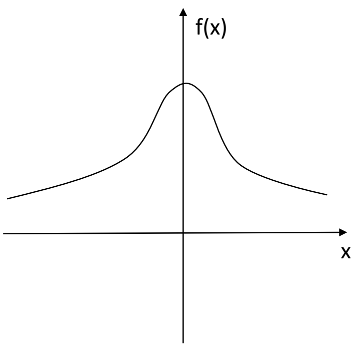
Průběhy funkcí – POSTUP:

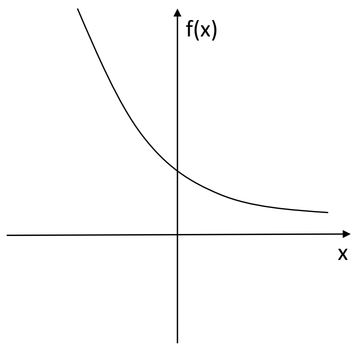
1. definiční obor D_f
2. průsečíky s osami
3. spojitost; sudost/lichost; periodicita
4. limitní chování v krajních bodech a v “podezřelých” bodech Df
5. asymptoty v $\pm\infty$
   ($p(x) = ax + b$, kde $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax)$)
6. první derivace v D_f; jednostranné derivace v krajních bodech
7. podezřelé body – diskuse (lok. a glob. max/min); monotonie
8. konvexita/konkávita – **úvahou** nebo druhá derivace
   ($f'' > 0$ kon**V**exní $\smile$ (= cup); $f'' < 0$ konk**Á**vní $\frown$ (= cave))
9. graf funkce

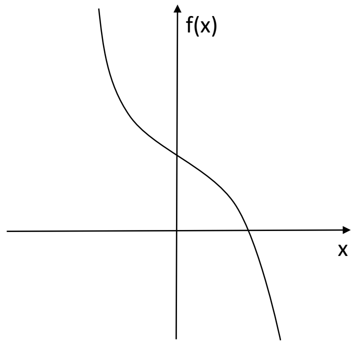
Rozcvička:
Nechť f je funkce s následujícími vlastnostmi:

– $f(x) > 0$ pro všechna $x > 0$,
– $f'(x) \le 0$ pro všechna x a
– $f'(0) = 0$

Mohl by některý z následujících obrázků být grafem této funkce?







1. Ukázkové příklady - vyšetřete průběh funkce, najděte extrémy a načrtněte grafy:

(a) $\sqrt[3]{(x^4-1)^2}$ (b) $\sin x - |\cos x|$ (c) $|x| \cdot \exp(-|x-1|)$

(d) $$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\sin^2 x}) & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Dokažte následující tvrzení:

(a) $\exp(x) \geq x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$

NÁSTIN ŘEŠENÍ: doplnění ... $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$ (tedy $0! := 1$, $0^0 := 1$)

(b) Obdélník minimalizující obvod při daném obsahu je čtverec.

3. Další příklady na průběh funkcí. Nabývají tyto funkce globálních a lokálních extrémů (= lok. maxim a minim, (neostrých) glob. maxim a minim)?

(a) $$g(x) = \begin{cases} \frac{|1+2x|}{\sqrt{1-2x+x^2}} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

(b) $\arccos \left|\frac{1-x}{1-2x}\right|$ (c) x^x (d) $f_n(x) = \exp(x(x+1)^n)$, $n \in \mathbb{N}$