

## 8. Cvičení z MA I. (30. 4. 2021)

Markéta Lopatková

[ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054](http://ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054)

Bonusové video: jak vyřešit viklající se stůl v pivní zahradce (aplikace Darbouxovy věty o nabývání mezihodnot (přednáška 6, věta 7) <https://www.youtube.com/watch?v=OuF-WB7mD6k>

### Derivace funkcí

Co to je a jak se počítá derivace – aritmetika derivací, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce. Co je jednostranná derivace a jak se počítá?

**1. (= 5. z minula)** Z definice určete ve všech bodech definičního oboru funkcí (jednostranné) derivace.

- (a)  $\operatorname{sgn} x$                       (b)  $|x|$                       (c)  $\frac{1}{x^2}$

VZOREČKY:

$$\begin{aligned}(x^a)' &= a \cdot x^{a-1} \text{ pro } x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R} \\ (e^x)' &= e^x \text{ pro } x \in \mathbb{R} \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \text{ pro } x \in \mathbb{R}^+ \\ (\sin x)' &= \cos x \text{ pro } x \in \mathbb{R} \\ (\cos x)' &= -\sin x \text{ pro } x \in \mathbb{R} \\ (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pro } x \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\end{aligned}$$

VZOREČKY pro aritmetiku derivací, derivaci složené funkce a derivaci inverzní funkce:

$f, g : U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  jsou funkce, které mají v bodě  $a$  derivaci (vlastní či nevlastní)

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a), && \text{je-li pravá strana definovaná.} \\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a), && \text{je-li pravá strana definovaná a } f \text{ nebo } g \text{ je spojitá v } a \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}, && \text{je-li } g \text{ spojitá v } a \text{ a } g(a) \neq 0 \\ (f \circ g)'(x_0) &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0), && \text{má-li } g \text{ derivaci v } x_0, f \text{ derivaci v } y_0, \text{ kde } y_0 = g(x_0), \\ &&& \text{a je-li pravá strana definovaná} \\ (f^{-1})'(b) &= \frac{1}{f'(a)}, && \text{má-li } f \text{ v } a \text{ nenulovou derivaci } f'(a)\end{aligned}$$

**2.** Odvoďte následující vztahy:

(a) Víme, že  $(\exp(x))' = \exp(x)$  a také  $\exp(0) = 1$ .

Pomocí definice derivace funkce  $\exp$  dokažte vzorec z minulého cvičení  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(b) Použijte větu o derivaci inverzní funkce a odvoďte vzorec pro derivaci funkce  $\ln x$ .

Pomocí věty o derivaci inverzních funkcí ověřte:

$$\begin{aligned}\text{(c)} \quad (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pro } x \in (-1, 1) \\ \text{(d)} \quad (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2} \text{ pro } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

VZOREČKY si zapamatujte!

**3. (= 6. z minula)** Určete ve všech bodech definičního oboru funkcí, zda existují (jednostranné) derivace, případně čemu se rovnají. Lze tyto funkce spojitě rozšířit?

- (a)  $\frac{1-x}{x+1}$       (b)  $|\frac{x-1}{1-2x}|$       (c)  $\sqrt{\sin x \cos x}$       (d)  $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$   
 (e)  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$       (f)  $\sqrt[3]{(1 - \exp(1 - x^2))^2}$       (g)  $|x - 2| - 2 \cdot \operatorname{arctg} x$

**4.** Vypočtěte derivace funkcí (včetně jednostranných):

- (a)  $f(x) = (x - a)^2(x - b)^2$  pro  $x \in < a, b >$ ,  $f(x) = \frac{1}{e}$  pro všechna ostatní  $x$

**5.** Vypočtěte (můžete např. podle l'Hospitala - ověřte ovšem podmínky!!)

- (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$       (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^5 + x^2 + 1)}{\ln(x^{10} + x + 3)}$

**6.** Vyšetřete průběh funkce  $f(x) = \sin x - |\cos x|$ .