

## 2. Cvičení z MA I. (12.3.2021)

Markéta Lopatková

[ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054](http://ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054)

**Na webu viz první sérii domácích úkolů – termín odevzdání 26.3.2021!**

**1. Rozcvička** Najděte funkci, která zobrazuje:

- (a) interval  $(0, 1)$  na interval  $[0, 1]$
- (b) interval  $[0, 1]$  na interval  $(0, 1)$
- (c) interval  $(0, 1)$  na interval  $(0, \infty)$
- (d) interval  $(0, 1)$  na interval  $(-\infty, \infty)$
- (e) interval  $[0, 1]$  na interval  $[0, \infty)$
- (f) interval  $(0, \infty)$  na interval  $(0, 1)$

### Přirozená, racionální a reálná čísla; spočetnost; supremum a infimum

Co to je „mohutnost“ konečné množiny a nekonečné množiny? Jak se definuje spočetnost?

**2.** Dokažte, že následující množiny jsou spočetné:

- (a) množina celých čísel  $\mathbb{Z}$ ;
- (b) množina dvojic přirozených čísel, tedy  $\mathbb{N}^2$ ; jak lze upravit pro racionální čísla  $\mathbb{Q}$ ?
- (c) množina všech řetězců nad abecedou  $A = \{a, b\}$  (hledáme tzv. lexikografické uspořádání).

**3.** Ukažte, že množina všech podmnožin přirozených čísel není spočetná

**4.** Dokažte, že racionální čísla tvoří hustou podmnožinu reálných čísel, tedy že pro každou dvojici reálných čísel  $a, b$  ( $a < b$ ) existuje racionální číslo  $q$  takové, že  $a < q < b$ .

**5.** Nechť  $A$  je neprázdná množina reálných čísel ( $A \subseteq \mathbb{R}$ , navíc  $A \neq \emptyset$ ). O  $A$  víte, že neexistuje její minimum.

- (a) Zapište formálně pomocí matematických symbolů výrok  $T$  „ $A$  má minimum“ a pak ho negujte.
- (b) Dokažte, že  $A$  je nekonečně velká (aspoň spočetně velká).

**6.** Najděte suprema a infima následujících množin nad reálnými čísly (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

- (a)  $A_1 = \{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$
- (b)  $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}\}$
- (c)  $A_3 = \{n^{(-1)^n}; n \in \mathbb{N}\}$
- (d)  $A_4 = \{q < \sqrt{3}; q \in \mathbb{Q}\}$