9. cvičení z MA II. (2. a 3. 12. 2021)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. Extrémy funkcí více proměnných a vázané extrémy.

1. Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \&\ x+y+z = 0\}$.

2. Vyšetřete globální extrémy následující funkce $f(x,y) = (x+y)\exp(-(x^2+y^2))$ na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le 1 \ \&\ |x| \le y+1\}$.

B. Aproximace pomocí Taylorovy řady.

Taylorova řada pro funkci jedné proměnné (definice): Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na nějakém okolí a, která má v tomto bodě vlastní derivaci všech řádů. Pak Taylorovou řadou v bodě a rozumíme následující řadu, kde $x \in \mathbb{R}$:

$$T^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylorova řada pro funkci více proměnných:
Nechť $a \in \mathbb{R}^n$ a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na nějakém okolí a, která má v tomto bodě spojité parciální derivace libovolného řádu. Pak Taylorovou řadou v bodě a rozumíme následující řadu (kde $x \in \mathbb{R}^n$):

$$T^{f,a}(x) = f(a) + \frac{1}{1!} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - a_i)(x_j - a_j) + ...$$

3. Aproximujte následující funkce f v okolí daného bodu a:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a = 0$

(i) $f(x) = \sin(x)$ (ii) $f(x) = \exp(x)$ (iii) $f(x) = \ln(1+x)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x \cdot \exp(x+y)$, $a = (0,0)$

(c) Lze aproximovat i funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$? Jak?