Extrémy funkcí více proměnných na otevřené množině

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Hessova matice funkce f v bodě a je matice 2. derivací této funkce v bodě a:

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^{m}$$

(Tedy $f : U \to \mathbb{R}$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu a a f má na U všechny derivace druhého řádu.)

$\to$ Pro $f \in \mathcal{C}^2(U)$ je Hessova matice symetrická (nezáleží na pořdí derivování).

Věta: Spojité funkce na kompaktu nabývají maxima a minima.

Hledáme všechny „podezřelé body":
– na „okrajích";
– tam, kde neexistují (parc. derivace);
– tam, kde parc. derivace existují a $\nabla f(a) = \bar{0}$
(kde gradient $\nabla f(a)$ je vektor hodnot parc. derivací fce f v bodě a).

Věta o lokálních extrémech: Nechť $f \in \mathcal{C}^2(U)$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je okolí bodu a.
– Pokud je $\nabla f(a) \neq \bar{0}$, pak f nemá v a extrém (ani neostrý).
– Pokud je $\nabla f(a) = \bar{0}$ a $H_f(a)$ pozitivně definitní, pak f má v a ostré lok. minimum.
– Pokud je $\nabla f(a) = \bar{0}$ a $H_f(a)$ negativně definitní, pak f má v a ostré lok. maximum.
– Pokud je $\nabla f(a) = \bar{0}$ a $H_f(a)$ indefinitní, pak f nemá v a lok. extrém.

Co znamená, že je matice pozitivně / negativně (semi)definitní / indefinitní? Kdy to nastává?

LINEÁRNÍ ALGEBRA:
Nechť $A = (a_{i,j} \in \mathbb{R}^{nxn})$ je symetrická matice reálných čísel.
Přiřadíme jí kvadratickou formu (= homogenní polynom stupně 2) o n proměnných:

$$P_A(x_1, \ldots, x_n) = xAx^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Zřejmě $P_A(\bar{0}) = 0$ a $P_A(tx) = t^2 P_A(x)$ pro každou matici A a skalár t.
Matice A se nazývá:
– *pozitivně definitní*, když $P_A(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{0}$
(resp. *negativně def.* při $P_A(x) < 0$);
– *pozitivně semidefinitní*, když $P_A(x) \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$
(resp. *negativně semidef.* při $P_A(x) \leq 0$);
– *indefinitní*, není-li ani pozitivně ani negativně semidefinitní.

Sylvestrovo kritérium: Kvadratická forma $q : R^n \to R$ je
– pozitivně definitní, jsou-li všechny hlavní subdeterminanty matice kladné;
– negativně definitní, střídají-li hlavní subdeterminanty znaménka (počínaje záporným);
– indefinitní, jsou-li všechny hlavní subdeterminanty matice nenulové a neplatí ani jeden z předchozích případů.