6. cvičení z MA II. (5. a 11. 11. 2021)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Opakování – totální diferenciál.
Totální diferenciál v bodě a je lineární funkce, která v okolí bodu a „dobře“ aproximuje funkci f; tato funkce se též značí, D_f, příp. $D_f(a)$, D_f^a či $\mathrm{d}f(a)$.

– Proč nám nestačí existence parc. derivací v bodě – a co je „lepší“ podmínka?

– Jaká tvrzení a věty platí pro tot. diferenciál, parciální a směrové derivace a jejich vztahy?

– Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?
Za jakých podmínek platí: $A_k = \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$ (kde A_k jsou hodnoty z definice tot. diferenciálu)

– Jak souvisí totální diferenciál s gradientem?
Za jakých podmínek platí: $D_f^a(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_k} h_k = \langle \nabla f(a), h \rangle$

– A jak souvisí totální diferenciál se směrovou derivací?
Za jakých podmínek platí: $D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$

1. (= 4. a 5. z minula) Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí. Jak lze tyto funkce v okolí daného bodu a odhadnout pomocí tot. diferenciálu?

(a) $f(x, y) = e^{xy}$, $a \in \mathbb{R}^2$

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $a = (1, 2, -1)$.
Jaká bude jeho hodnota tot. diferenciálu této funkce ve směru $h = (-1, 1, 1)$?

2. (= 6. z minula) Ukažte, že pro malá x a y platí:

(a) $(1 + x)^m (1 + y)^n \approx 1 + mx + ny$

(b) $\ln(1 + x) \ln(1 + y) \approx xy$

3. Určete směrové derivace funkce $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$ v bodě $(0, 0, 0)$ a směru $h = (h_1, h_2, h_3)$. Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje totální diferenciál.

Řetízkové pravidlo.

Pro zahřátí: Mějme funkce
$x = r\cos(s)$, $y = r\sin(s)$ (tedy $x = x(r, s)$ a $y = y(r, s)$), a dále
$f(x, y) = xe^{x+y}$.
Složením dostaneme funkci $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$H(r, s) = f(x(r, s), y(r, s)) = r\cos(s)e^{(r\cos(s))+(r\sin(s))}$.
Spočítejte „postaru“ její parciální derivace.

Z přednášky: Mějme funkci $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou jako složení funkcí $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tedy:

$$H(r, s) = f(g_1(r, s), g_(r, s)) \ .$$

Zkusme zjistit, jakým způsobem dostaneme řetízkové pravidlo (neformálně, formální důkaz najdete ve skriptech).

I. pro funkce jedná proměnné víme: $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$

II. pro funkce dvou proměnných víme: $f(x + h, y) \approx f(x, y) + h\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$

4. Mějme funkce $f, g_1, g_2, H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (jako výše), kde:

$f(x, y) = xe^{x+y}$
$g_1(r, s) = r\cos(s)$
$g_2(r, s) = r\sin(s)$
$H(r, s) = f(g_1(r, s), g_(r, s))$

(a) Pomocí řetízkového pravidla spočítejte parciální derivace funkce H.
(b) Spočítejte totální diferenciál funkce H.
(c) Aproximujte pro malá ϵ hodnotu $H(1 + \epsilon, \epsilon)$ (pomocí totálního diferenciálu).

5. Mějme funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$f(x, y) = x + xy + y/x$
$g(r, s) = (\sin(rs), r - s)^T$

Spočítejte všechny parciální derivace složené funkce $H = f \circ g$. Užijte maticové značení z přednášky! Jak toto souvisí s aproximací lineární funkcí?