

5. Cvičení z MA II. (29. 10. a 4. 11. 2021)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Totální diferenciál.

Řekneme, že funkce $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $a \in G$ (**totální**) **diferenciál**, existuje-li funkce μ spojitá v okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $o = (0, \dots, 0)$ taková, že $\mu(o) = 0$, a čísla A_1, \dots, A_n pro která platí

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^n A_k h_k + \|h\| \mu(h).$$

Čísla A_k ($k = 1, \dots, n$) nám dávají lineární funkci L , která v bodě a „dobře“ aproximuje funkci f (této funkci se též říkává tot. diferenciál a značívá se D_f , příp. $D_f(a)$ či D_f^a).

Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi? Jak souvisí totální diferenciál s gradientem?

Pro zahřátí: Mějme funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \vee y = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$$

- Vyšetřete její spojitost.
- Spočítejte parciální derivace v bodech mimo přímky $x = 0$ a $y = 0$, v bodech ležících na těchto přímkách mimo bod $(0, 0)$ a v bodě $(0, 0)$.
- Spočítejte směrové derivace ve směru $(1, 1)$ mimo přímky $x = 0$ a $y = 0$ a v bodě $(0, 0)$.
- Jak je to s totálním diferenciálem v bodu $(0, 0)$?

1. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1 + h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1, 1)$.

2. Buď dána funkce

$$f : (x, y) = \log(\sqrt{y+1} - x)$$

- Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
- Vypočítejte gradient $\nabla f(x, y)$ v bodě $[0, 0]$.
Pokud má f v tomto bodě totální diferenciál, určete ho.
- Určete rovnici tečné roviny v bodě $[0, 0]$.
- Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace $f(-0,04; 0,02)$.

3. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1+xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

4. Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí f . Jak lze funkci f pomocí tot. diferenciálu odhadnout v okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$, resp. $a \in \mathbb{R}^3$?

(a) $f(x, y) = e^{xy}$ (b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

5. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ v bodě $a = (1, 2, -1)$; jaká bude jeho hodnota ve směru $h = (-1, 1, 1)$?

6. Ukažte, že pro malá x a y platí:

(a) $(1 + x)^m(1 + y)^n \approx 1 + mx + ny$

(b) $\ln(1 + x)\ln(1 + y) \approx xy$