4. Cvičení z MA II. (21. a 22. 10. 2021)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Parciální derivace

Nechť $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ G$ je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0]$ je i-tý vektor kanoniclé báze $\mathbb{R}^n$. *Parciální derivací fce f podle i-té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení: $C^1(G)$ … množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc. derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako fce n proměnných).

1. (= cvičení 6 z minula) Určete definiční obor následujících funkcí na R^n, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují. Případně vyčíslete v zadaném bodě.

(a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ v bodě $[1, -2]$

(b) $f(x, y, z) = (\frac{x}{y})^z$ v bodě $[e, 1, 2]$. Vypočtěte též parciální derivace 2. řádu!

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$

(d)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

2. Proč nestačí existence parciálních derivací pro spojitost?
Jak je to s požadavkem spojitosti parc. derivací v okolí daného bodu jako předpokladem pro spojitost funkce v daném bodu (a jak se má k totálnímu diferenciálu)?

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x = 0 \text{ nebo } y = 0 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Co to je **směrová derivace**?

Nechť $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ G$ je otevřená, $a \in G$ a v je vektor v $\mathbb{R}^n \setminus \{0, (\ldots, 0)\}$. *Směrovou derivací fce f v bodě a ve směru v-té proměnné* rozumíme číslo

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \quad \text{značí se též } f'_v(a)$$

(pokud tato limita existuje).

Jak souvisí směrová derivace s parciálními derivacemi?

3. Vypočtěte derivace následujících funkcí f v zadaných směrech v v zadaných bodech a.

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $v = (-1,1,1)$ v bodě $a = (1,2,-1)$

(b) $f(x,y) = e^{x-y^2}$ ve směrech $(1,0),\ (-1,0),\ (1,1)$ v bodě $(0,0)$

Na příště: Budeme procvičovat řetízkové pravidlo a totální diferenciál – prosím, zopakujte si, o co jde, z přednášky (případně si připravte tahák)!

Pro zajímavost, pokud budeme mít čas: Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací:

$f(x,y) = xy$ pro $|x| \geq |y|$ a $f(x,y) = 0$ pro $|x| < |y|$

Řešení:

1a. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{y\cdot\operatorname{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x\cdot\operatorname{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}\cdot$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neex. pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ pro $y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ pro $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neex. pro $x \neq 0$

1b. $D_f = \{[x,y,z] \in R^3; x > 0, y > 0\} \cup \{[x,y,z] \in R^3; x < 0, y < 0\}$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot \frac{z}{x}$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot (-\frac{z}{y})$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot \ln\frac{x}{y}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot \frac{z}{x^2}(z-1)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot \frac{z}{y^2}(z+1)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot (\ln\frac{x}{y})^2$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) = -(\frac{x}{y})^z \cdot \frac{z^2}{xy}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z) = -(\frac{x}{y})^z \cdot \frac{1}{y}(z\ln\frac{x}{y}+1)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) = (\frac{x}{y})^z \cdot \frac{1}{x}(z\ln\frac{x}{y}+1)$

1c. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{8y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neex., $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neex.

1d. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$