3. Cvičení z MA II. (14. a 15. 10. 2021)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. Ještě metrické prostory

Jak se definují otevřené a uzavřené prostory? Co jsou vzory a obrazy pro zobrazení mezi metrickými prostory?

1. (= 4. z minulého týdne)
Platí následující tvrzení? Dovedete zdůvodnit?

(a) Množina $B(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\}$ (pro $r > 0$) je otevřená množina metrického prostoru (M,d).

(b) Množina $B'(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) \le r\}$ (pro $r > 0$) je uzavřená množina metrického prostoru (M,d).

(c) Jednobodové množiny jsou uzavřené množiny metrického prostoru (M,d).

(d) Jak vypadají otevřené množiny v metrickém prostoru (M,d), jehož každý bod je izolovaným bodem? (Bod a je izolovaným bodem množiny $A \subseteq M$, pokud $\exists r > 0$ takové, že $B(a,r) \cap A = \{a\}$.)

2. Jaký je vztah mezi následujícími množinami – množinou $\overline{A \cap B}$ a množinou $\overline{A} \cap \overline{B}$?

B. Spojitost reálných funkcí více proměnných

Jak se definuje spojité zobrazení? Jaká tvrzení o spojitých zobrazeních znáte? (skládání spoj. funkcí, charakteristika pomocí vzorů, charakteristika pomocí konv. posloupností)

3. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojité funkce $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (pro jednoduchost se omezme na polynomy dvou proměnných).

4. Zkoumejte následující funkci $f:\ \mathbb{R}^n \to R$ (kde na $\mathbb{R}^n$ uvažujeme např. eukleidovskou metriku):
$f(x,y) = \sqrt{\log(x-y)}$.
Určete definiční obor této funkce (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice.
Nabývá tato funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

5. Lze následující funkce dodefinovat tak, aby byly na $\mathbb{R}^2$ spojité? Jak? Jsou tyto funkce omezené? Nabývají tam své největší a nejmenší hodnoty (pokud ano, jaké)?

(a) $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

C. Parciální derivace

Parciální derivace. Nechť $f : G \subset R^n \to R,\ G$ je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0]$ je i-tý vektor kanoniclé báze R^n. *Parciální derivací funkce f podle i-té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).
Značení: $C^1(G)$ ... množina funkcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc. derivace podle všech proměnných (tj. funkce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako funkce n proměnných).

6. Určete definiční obor následujících funkcí na R^n, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslete.

(a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ v bodě $[1, -2]$

(b) $f(x, y, z) = (\frac{x}{y})^z$ v bodě $[e, 1, 2]$. Vypočtěte též parciální derivace 2. řádu!