

## 9. Cvičení z MA I. (7. 5. 2021)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

### Průběhy funkcí – POSTUP:

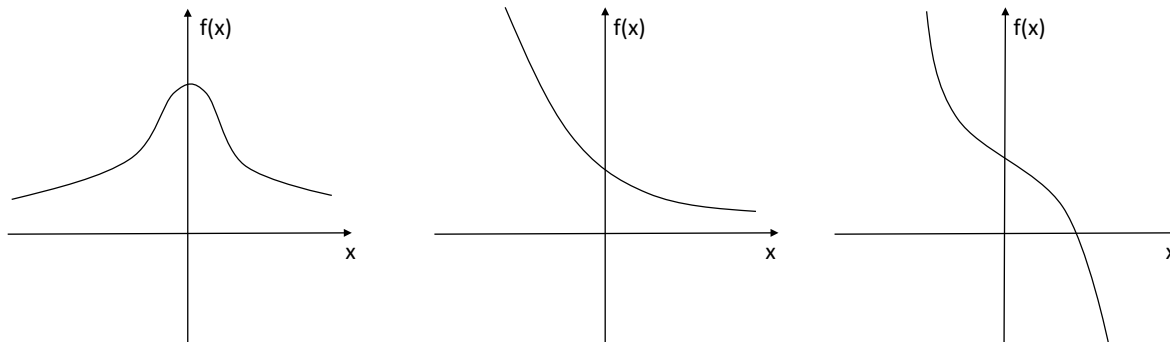
1. definiční obor  $D_f$
2. průsečíky s osami
3. spojitost; sudost/lichost; periodičita
4. limitní chování v krajních bodech a v “podezřelých” bodech  $D_f$
5. asymptoty v  $\pm\infty$   
( $p(x) = ax + b$ , kde  $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$  a  $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$ )
6. první derivace v  $D_f$ ; jednostranné derivace v krajních bodech
7. podezřelé body – diskuse (lok. a glob. max/min); monotonie
8. konvexita/konkávita – **úvahou** nebo druhá derivace  
( $f'' > 0$  konvexní  $\cup$  (= cup);  $f'' < 0$  konkávní  $\cap$  (= cave))
9. graf funkce

### Rozcvička:

Nechť  $f$  je funkce s následujícími vlastnostmi:

- $f(x) > 0$  pro všechna  $x > 0$ ,
- $f'(x) \leq 0$  pro všechna  $x$  a
- $f'(0) = 0$

Mohl by některý z následujících obrázků být grafem této funkce?



1. Ukázkové příklady - vyšetřete průběh funkce, najděte extrémy a načrtněte grafy:

(a)  $\sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}$                       (b)  $\sin x - |\cos x|$                       (c)  $|x| \cdot \exp(-|x - 1|)$

(d)  $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\sin^2 x}) & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & x = k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

**2.** Dokažte následující tvrzení:

(a)  $\exp(x) \geq x + 1$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$

(b) Obdélník minimalizující obvod při daném obsahu je čtverec.

**3.** Další příklady na průběh funkcí. Nabývají tyto funkce globálních a lokálních extrémů (= lok. maxim a minim, (neostrých) glob. maxim a minim)?

(a) 
$$g(x) = \begin{cases} \frac{|1+2x|}{\sqrt{1-2x+x^2}} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

(b)  $\arccos \left| \frac{1-x}{1-2x} \right|$

(c)  $x^x$

(d)  $f_n(x) = \exp(x(x+1)^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$