

7. Cvičení z MA I. (23. 4. 2021)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Funkce – spojitost, limita

1. Předpokládejme, že reálné funkce f a g jsou spojité v bodě a . Jsou pak nutně v a spojité i funkce $f + g$, $f \cdot g$ a f/g ?

2. Určete body, kde následující funkce nejsou spojité. Je možno je v těchto bodech spojitě dodefinovat?

(a) $\frac{1}{x-15}$ (b) $|(x-2)(x+3)|$ (c) $\frac{\sin x}{x}$

Důležité: zapamatujte si, že platí! (dokážeme později):

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3. (= 7 z minulého cvičení) Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\sin x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 4^x}{\sin 2x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$
(g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\arctg\left(\frac{1}{2-x}\right)\right)^2$ (h)* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^{2x-1}$ (i)* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+7}\right)^x$

4. Spočítejte následující limitu (nebo dokažte, že neexistuje).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$$

B. Derivace funkcí

Co to je a jak se počítá derivace – aritmetika derivací, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce. Co je jednostranná derivace a jak se počítá?

5. Z definice určete ve všech bodech definičního oboru funkcí (jednostranné) derivace.

(a) $\operatorname{sgn} x$ (b) $|x|$ (c) $\frac{1}{x^2}$

6. Určete ve všech bodech definičního oboru funkcí, zda existují (jednostranné) derivace, případně čemu se rovnají. Lze tyto funkce spojitě rozšířit?

(a) $\frac{1-x}{x+1}$ (b) $\left|\frac{x-1}{1-2x}\right|$ (c) $\sqrt{\sin x \cos x}$ (d) $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$
(e) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ (f) $\sqrt[3]{(1 - \exp(1 - x^2))^2}$ (g) $|x - 2| - 2 \cdot \arctg x$