6. Cvičení z MA I. (16. 4. 2021)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Funkce – spojitost, limita

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá? Kdy je funkce rostoucí?

1. Dokažte, že je-li f neklesající na $(-\infty, a\rangle$ a nerostoucí na $\langle a, +\infty)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, pak f nabývá maxima.

2. Nechť f nabývá minima v $a \in \mathbb{R}$. Musí existovat $\epsilon > 0$ takové, že f je nerostoucí na $(a-\epsilon, a\rangle$ a neklesající na $\langle a, a+\epsilon)$?

3. Které z následujících operací provedených na neklesající funkce f, g dává opět neklesající funkci?

(a) $f+g$ (b) $f-g$ (c) $\max\{f,g\}$ (d) $\min\{f,g\}$ (e) $f \circ g$

4. Nechť f a g jsou funkce definované na intervalu $\langle 0,1\rangle$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0,1) \\ 2 & \text{pro } x = 1. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocí definice zjistěte, zda mají tyto funkce limity v bodě 1 a případně jakou.

5. Sestrojte funkci f spojitou na $(0,1\rangle$, kterou ale nelze spojitě rozšířit na $\langle 0,1\rangle$.

6. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, pokud $a = 0, 1, +\infty, -\infty$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ (c) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ (d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ (g) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$

(h) $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ (i) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ (j) $\lim_{x\to 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

Důležité: zapamatujte si, že platí! (dokážeme později):

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (d) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

7. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+1}{\sin x}$ (b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-x^4}{\sin 2x}$ (e) $\lim_{x\to +\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$

(g) $\lim_{x\to 2} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2-x}\right)\right)^2$ (h)* $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^{2x-1}$ (i)* $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+7}\right)^x$