

5. Cvičení z MA I. (9. 4. 2021)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. posloupnosti a limity, řady

1. Spočítejte následující limity:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4+(-1)^n}{-7} \right)^n \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$$

2. Dokažte, zda následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, případně ji spočítejte:

$$(a) a_1 = \sqrt{c} \quad (c > 0, c \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

$$(b) a_1 = t \quad (t > 0, t \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

3. Najděte hromadné body, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty}$, posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$, kde

$$(a) a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \quad (b) b_n = n - 4\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \quad (c) c_n = (-1)^n \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)$$

4. Jak definujeme nekonečnou řadu? Rozhodněte, zda následující řady konvergují:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{6^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

B. Funkce

5. Které z následujících operací provedených na neklesající funkce f, g dává opět neklesající funkci?

$$(a) f + g \quad (b) f - g \quad (c) \max\{f, g\} \quad (d) \min\{f, g\} \quad (e) f \circ g$$

6. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, \text{ pokud } a = 0, 1, +\infty, -\infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \quad (g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \quad (i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad (j) \lim_{x \rightarrow 1} (\lfloor x \rfloor - x) \quad (k) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$$

Příště: funkce a spojitost